

29  
Besancon

# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE  
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR INGÉNIEUR**

**Mention : Mécanique non linéaire et chronométrie**

par

**Elisabeth EPERCIEUX**

**ETUDE DE LA DÉFORMATION  
VISCO-PLASTIQUE DES COQUES MINCES  
DE RÉVOLUTION SOUMISES  
A UNE PRESSION HYDROSTATIQUE**



Soutenue le 28 novembre 1980 devant la Commission d'Examen :

MM. R. CHALEAT, Professeur

Président

H. LECOANET, Chargé de recherches

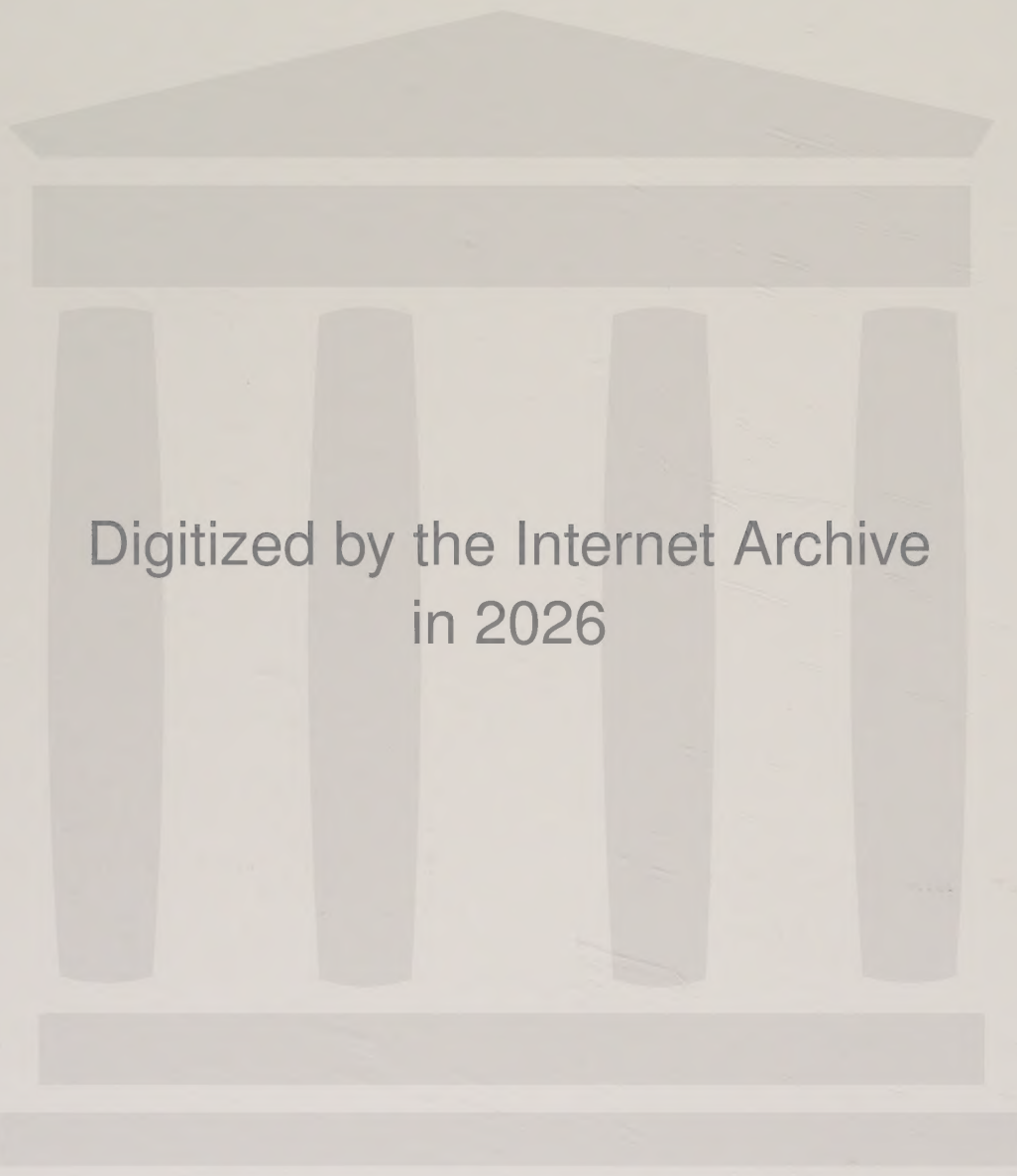
C. OUDET, Directeur de recherches à PORTESCAP France

C. OYTANA, Professeur

} Examinateurs







Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41546609\\_0007](https://archive.org/details/IA41546609_0007)

# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE  
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR INGÉNIEUR**

**Mention : Mécanique non linéaire et chronométrie**

par

**Elisabeth EPERCIEUX**

---

**ETUDE DE LA DÉFORMATION  
VISCO-PLASTIQUE DES COQUES MINCES  
DE RÉVOLUTION SOUMISES  
A UNE PRESSION HYDROSTATIQUE**



Soutenue le 28 novembre 1980 devant la Commission d'Examen :

**MM. R. CHALEAT, Professeur**

**Président**

**H. LECOANET, Chargé de recherches  
C. OUDET, Directeur de recherches à PORTESCAP France  
C. OYTANA, Professeur**

**Examineurs**

THÈSE

LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE  
L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES

PRÉSENTÉE

PAR

LE DOCTEUR EN SCIENCES

ET



ETUDE DE LA DÉFORMATION  
VISCOPLASTIQUE DES COQUES MINCES  
DE RÉVÉLATION SOUMISES  
À UNE PRESSION HYDROSTATIQUE

Présentée à la Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Bruxelles

Président

M. R. CHATELAIN

M. R. CHATELAIN, Président de la Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Bruxelles  
M. R. CHATELAIN, Président de la Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Bruxelles  
M. R. CHATELAIN, Président de la Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Bruxelles

## UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

**Président : Monsieur le Professeur Pierre LÉVÊQUE**

**Président honoraire : Monsieur le Professeur Jean THIÉBAUT**

### FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

#### DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS  
Physique Générale-optique

#### ASSESEURS

M. le Professeur Bernard MILLET  
Botanique  
M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant  
Biol. animale Ecologie

#### DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,  
THIEBAUT, BERNARD

#### PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN  
THEOBALD N., THIRY, TRILLAT, TRONCHET,  
UEBERSFELD

|                      |                                           |
|----------------------|-------------------------------------------|
| MM. BANTEGNIE Robert | : Mathématiques                           |
| BENILAN Philippe     | : Mathématiques                           |
| BERNARD Jean         | : Chimie Physique                         |
| BIDAULT Michel       | : Taxonomie expérimentale                 |
| BROQUET Paul         | : Géologie                                |
| BRUCKERT Sylvain     | : Ecologie végétale                       |
| BULABOIS Jean        | : Physique Gle optique                    |
| CAPODANNO Pierre     | : Mécanique théorique                     |
| CERUTTI Ernest       | : Chimie appliquée                        |
| CHALEAT Raymond      | : Mécanique appliquée                     |
| CHARDON J. Claude    | : Spectroscopie                           |
| CHAUVE Pierre        | : Géologie minéralogie                    |
| COUGNARD Jean        | : Mathématiques                           |
| DEVIN Claude         | : Chimie 1er cycle                        |
| DOBREMEZ Jean-Fr.    | : Biologie                                |
| DUBOUCHET Jacques    | : Physiologie végétale                    |
| GALATRY Louis        | : Physique moléculaire                    |
| GAUDEMER Yves        | : Biochimie                               |
| GIRARDET Claude      | : Physique Moléculaire                    |
| GOMOT Lucien         | : Zoologie-Embryologie                    |
| GOUARNE René         | : Mathématiques                           |
| GRAS Georges         | : Mathématiques                           |
| GREMILLARD Jean      | : Mathématiques                           |
| KARCHE J. Paul       | : Pétrographie Minéralogie                |
| LALLEMENT Gérard     | : Mécanique appliquée                     |
| LAUDE Bernard        | : Chimie organique                        |
| LESAIN Pierre        | : Mathématiques I                         |
| LHOTE François       | : Automatique                             |
| MERIGOUX Henri       | : Cristallographie et Synthèses minérales |

|                     |                                    |
|---------------------|------------------------------------|
| MIELLOU J. Claude   | : Analyse numérique                |
| MILLET Bernard      | : Botanique                        |
| MONTAGNER Hubert    | : Psychophysiologie                |
| MOREELS Guy         | : Astronomie                       |
| OLIVIER Marcel      | : Electroniq. quantique            |
| OYTANA Claude       | : Mécanique appliquée              |
| PAGETTI Jacques     | : Chimie appliquée, Génie chimique |
| PARIZET Jean        | : Mathématiques                    |
| PERROT Roger        | : Chimie générale                  |
| PLUVINAGE Philippe  | : Physique théorique               |
| POTIER Robert       | : Physique des solides             |
| RANGHEARD Yves      | : Géologie                         |
| REAL Pierre         | : Ecologie animale                 |
| RIPPLINGER Jean     | : Physiologie animale              |
| ROBERT Daniel       | : Physique                         |
| ROBERT Guy          | : Electrochimie                    |
| ROBERT Jacques      | : Mathématiques I                  |
| THEOBALD J.-Gérard  | : Spectroscopie hertzienne         |
| THIEBAUT Jean       | : Pétrogr. minéralogie             |
| TREHEL Michel       | : Informatique                     |
| VERNEAUX Jean       | : Zoologie-Embryologie             |
| VIENOT Jean-Charles | : Physique Gle optique             |
| WEIL Michel         | : Mathématiques                    |

#### Responsable des services administratifs :

M. Jean-Marie RUNGE



*Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Mécanique Appliquée de Besançon dirigé par Monsieur le Professeur CHALEAT que je remercie très sincèrement de m'avoir accueillie avec beaucoup de bienveillance et d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.*

*Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur OYTANA, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon et à Monsieur LECOANET, chargé de recherche au C.N.R.S., qui ont dirigé mes recherches et m'ont permis de mener à bien ce travail.*

*Je tiens à remercier Monsieur OUDET, Directeur de recherche à PORTESCAP-FRANCE, d'avoir accepté de participer à ce jury.*

*Je tiens à citer Monsieur VARCHON, Docteur-Ingénieur, qui m'a toujours aidée et encouragée.*

*Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur BURTHERET, Technicien, qui a su m'assister avec beaucoup de patience et de disponibilité et me faire bénéficier de toute son expérience pour mener à bien l'étude expérimentale.*

*Je remercie également tout le personnel du Laboratoire pour sa sympathie et en particulier Madame BESSON et Mademoiselle COSTILLE pour le soin apporté à l'impression de ce mémoire.*



## SOMMAIRE

-----

|                                                                                   | pages  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Avant-propos                                                                      |        |
| Sommaire                                                                          |        |
| Notations                                                                         |        |
| Introduction                                                                      | 1      |
| <br><u>PREMIERE PARTIE : BULGING A FROID</u>                                      | <br>2  |
| <u>Chapitre I : Etude théorique du bulging à froid</u>                            | 3      |
| I.1. Introduction                                                                 | 3      |
| I.2. Principe de la méthode de calcul                                             | 5      |
| I.2.1. Contraintes dans les voiles de révolution<br>soumis à une pression interne | 6      |
| I.2.2. Calcul des incréments de déformation                                       | 11     |
| I.2.3. Détermination des déplacements                                             | 16     |
| I.3. Résolution numérique                                                         | 18     |
| I.3.1. Méthode pas à pas                                                          | 18     |
| I.3.2. Calcul des nouvelles coordonnées et de la<br>nouvelle épaisseur            | 24     |
| I.3.3. Différentes approximations de la méridienne                                | 24     |
| I.3.4. Déformée initiale                                                          | 28     |
| I.3.5. Organigramme                                                               | 30     |
| I.4. Résultats théoriques                                                         | 33     |
| I.4.1. Données                                                                    | 33     |
| I.4.2. Influences des divers paramètres                                           | 33     |
| I.4.3. Résultats                                                                  | 39     |
| <br><u>Chapitre II : Résultats expérimentaux du bulging à froid</u>               | <br>40 |
| II.1. Appareillage expérimental                                                   | 40     |
| II.2. Matériaux utilisés                                                          | 41     |
| II.2.1. Préliminaires                                                             | 41     |
| II.2.2. L'aluminium                                                               | 42     |
| II.2.3. Le laiton                                                                 | 42     |



|                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------|----|
| II.3. Résultats expérimentaux                               | 43 |
| II.3.1. Mesure des déformations par cercles concentriques   | 43 |
| II.3.2. Mesure de l'épaisseur                               | 45 |
| II.3.3. Utilisation de jauges de contraintes                | 46 |
| II.3.4. Méthode optique                                     | 47 |
| II.4. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux | 56 |
| II.4.1. Déformée                                            | 56 |
| II.4.2. Epaisseur                                           | 57 |
| II.4.3. Déformations                                        | 57 |
| II.4.4. Conclusion                                          | 57 |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| <u>Chapitre III : Bulging avec rétreint</u> | 65 |
| III.1. Introduction                         | 65 |
| III.2. Approche théorique                   | 66 |
| III.2.1. Mise en équation                   | 66 |
| III.2.2. Résultats obtenus                  | 73 |
| III.3. Essais de rétreint                   | 83 |
| III.3.1. Matériel utilisé                   | 83 |
| III.3.2. Chronologie des essais             | 83 |

## DEUXIEME PARTIE : FORMAGE HYDRAULIQUE A CHAUD 88

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| Introduction au bulging à chaud | 89 |
|---------------------------------|----|

## Chapitre IV : Courbe limite d'emboutissage à rupture de d'alliage Zn-Al 90

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| IV.1. Nécessité des courbes limites d'emboutissage                                      | 90 |
| IV.1.1. Existence de déformations limites                                               | 90 |
| IV.1.2. Principaux modes simples de déformation                                         | 90 |
| IV.1.3. Existence de différentes courbes d'emboutissage                                 | 91 |
| IV.1.4. Intérêt des courbes limites de formage                                          | 91 |
| IV.2. Détermination expérimentale de la courbe limite d'emboutissage à rupture du Zn-Al | 92 |
| IV.2.1. Types d'essais utilisés                                                         | 92 |
| IV.2.2. Méthode des réseaux de cercles                                                  | 93 |
| IV.2.3. Appareillage expérimental                                                       | 94 |



|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| IV.2.3.1. Dispositif de formage                                                                          | 96  |
| IV.2.3.2. Dispositif de serrage du pourtour de la tôle                                                   | 96  |
| IV.2.3.3. Fluide utilisé pour le formage                                                                 | 96  |
| IV.2.4. Matériau utilisé                                                                                 | 97  |
| IV.3. Résultats obtenus                                                                                  | 97  |
| <u>Chapitre V : Bulging limité</u>                                                                       | 99  |
| V.1. Conditions expérimentales                                                                           | 99  |
| V.1.1. Dispositif expérimental                                                                           | 99  |
| V.1.2. Etat du matériau utilisé                                                                          | 100 |
| V.2. Remarques                                                                                           | 100 |
| V.2.1. Absence de glissement                                                                             | 100 |
| V.2.2. Explication du creux de l'embouti                                                                 | 101 |
| V.2.3. Variation de la pression au cours de l'emboutissage                                               | 102 |
| V.3. Résultats obtenus                                                                                   | 102 |
| V.3.1. Formes de l'embouti en fonction de la pression                                                    | 103 |
| V.3.2. Influence de la hauteur de l'embouti sur le rayon de<br>courbure et sur la pression avant rupture | 104 |
| V.3.3. Influence de la température de la plaque                                                          | 104 |
| V.3.4. Influence de la vitesse d'écoulement                                                              | 105 |
| V.3.5. Répartition de l'épaisseur de l'embouti sur un méridien                                           | 105 |
| V.3.6. Calcul de la surface développée                                                                   | 107 |
| V.3.7. Conclusion sur la bulging limité                                                                  | 108 |
| CONCLUSION                                                                                               | 119 |
| BIBLIOGRAPHIE                                                                                            | 120 |



## N O T A T I O N S

---

|                                   |                                                                                                                            |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $P$                               | pression hydrostatique                                                                                                     |
| $\delta P$                        | incrément de pression                                                                                                      |
| $T_\sigma$ ou $(\sigma_{ij})$     | tenseur des contraintes                                                                                                    |
| $\sigma_m, \sigma_p, \sigma_n$    | contraintes principales de $T_\sigma$ dans un système d'axes curvilignes<br>lié à la géométrie de la surface de révolution |
| $R_1$                             | rayon de courbure d'une surface de révolution suivant le méridien                                                          |
| $R_2$                             | rayon de courbure d'une surface de révolution suivant la courbe ortho-<br>gonale au méridien                               |
| $N_p, N_m$                        | tensions normales relatives respectivement au parallèle et au méridien                                                     |
| $x, \theta, y$ ou $r, \theta, z$  | coordonnées cylindriques                                                                                                   |
| $e$                               | épaisseur de la coque                                                                                                      |
| $e_0$                             | épaisseur initiale de la coque                                                                                             |
| $F$                               | force due à l'action de la pression exercée sur la surface de la calotte<br>sphérique                                      |
| $T_\epsilon$ ou $(\epsilon_{ij})$ | tenseur des déformations                                                                                                   |
| $(d\epsilon_{ij})$                | tenseur des incréments de déformations                                                                                     |
| $\delta_{ij}$                     | symbole de Kronecker                                                                                                       |
| $\gamma$                          | coefficient de Poisson                                                                                                     |
| $E$                               | module d'Young                                                                                                             |
| $(d\sigma_{ij})$                  | tenseur des incréments de contraintes                                                                                      |
| $T_s$ ou $(s_{ij})$               | tenseur déviateur des contraintes                                                                                          |
| $d\lambda$                        | paramètre utile au calcul des déformations plastiques                                                                      |
| $R$                               | rapport des deux rayons de courbure ( $R_2/R_1$ )                                                                          |
| $\emptyset$                       | angle de la normale à la surface avec l'axe de révolution                                                                  |
| $\bar{\sigma}$                    | contrainte équivalente                                                                                                     |
| $H$                               | fonction d'écrouissage                                                                                                     |
| $\Sigma_2^d$                      | deuxième invariant du déviateur des contraintes                                                                            |
| $\bar{\epsilon}$                  | déformation équivalente                                                                                                    |
| $n$                               | exposant de la loi d'écrouissage                                                                                           |
| $\sigma_0$                        | limite élastique                                                                                                           |
| $d\vec{U}$ ( $du_x, du_y$ )       | accroissement du vecteur déplacement                                                                                       |
| $PR_0$                            | pression initiale                                                                                                          |
| $i$                               | indice de position                                                                                                         |
| $j$                               | indice de pression                                                                                                         |



$V_{i,j}$  accroissement de la variable  $V$  calculé au point d'indice  $i$   
 provoqué par l'accroissement de pression  $\delta P_j$   
 $N$  ou  $NPOINT$  nombre de points de découpage de la méridienne  
 $x_{i,j}, y_{i,j}$  coordonnées des points de la méridienne  
 $R_0$  rayon d'encastrement du flan  
 $\lambda$  valeur du test sur l'incrément de déformation équivalente  
 $l_0$  diamètre du cercle dans la méthode des réseaux de cercles  
 $l_1, l_2$  grand axe et petit axe de l'ellipse dans la méthode des réseaux  
 de cercles  
 $P_1, P_2$  projecteurs utilisés pour la méthode optique  
 $\alpha$  angle de l'axe du projecteur avec la normale à la surface de référence  
 $m$  ordre de la frange de Moiré  
 $z$  côte d'une frange de Moiré  
 $z_0$  côte du plan de référence par rapport au plan des projecteurs  
 $a$  demi-distance des deux projecteurs  
 $p$  pas des franges projetées sur le plan de référence  
 $p_0$  pas des franges du réseau  
 $f$  distance focale des projecteurs  
 $G$  grandissement des projecteurs  
 $D$  diamètre utile du flan  
 $\Delta_z$  différence de niveau entre deux franges  
 $\mu$  coefficient de frottement tôle-serre-flan lors du rétreint  
 $\tau_r, \tau_\theta, \tau_z$  contraintes principales s'exerçant sur un élément de collerette  
 en rétreint  
 $d\epsilon_r, d\epsilon_\theta, d\epsilon_z$  incréments de déformation  
 $\alpha$  pente de la courbe de traction dans le domaine plastique  
 $R$  ou  $R_i$  rayon extérieur de la collerette rétreinte  
 $R_0$  rayon extérieur initial  
 $R_{int}$  rayon intérieur  
 $\delta R$  diminution du rayon extérieur à chaque pas du calcul  
 $LDR$  rapport limite d'emboutissage  
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  déformations principales pour les courbes limites d'emboutissage  
 $\bar{r}, n$  coefficients respectivement d'anisotropie et d'écrouissage du matériau  
 $H$  hauteur de l'embouti lors du bulging limité  
 $R_p$  rayon du plat de l'embouti  
 $R_c$  rayon de courbure de l'embouti  
 $t$  temps de formage de l'embouti  
 $V$  volume de l'embouti  
 $S$  surface développée



## I N T R O D U C T I O N

-----

Ce travail s'inscrit dans le cadre des recherches effectuées par l'équipe de rhéologie du Laboratoire de Mécanique Appliquée, pour étudier le "bulging", c'est-à-dire le formage des métaux à l'aide d'une pression hydrostatique. Il fait suite au diplôme d'étude approfondie, et à la thèse de J.F. BRANDON | 1 | , | 2 | , consacrés à la mise en forme, à chaud, des matériaux superplastiques.

La première partie de ce mémoire est une extension des travaux cités ci-dessus à la mise en forme à froid des coques minces de révolution. Le formage à froid se différencie du formage à chaud (ou "fluiformage") par le fait que les matériaux utilisés ont un comportement élasto-plastique et non plus viscoélastique. Le temps n'interviendra donc plus dans l'évolution des déformations.

Nous indiquerons tout d'abord la méthode de calcul proposée pour déterminer les caractéristiques géométriques de la pièce au cours de la déformation. Nous présenterons ensuite les essais expérimentaux effectués sur deux matériaux : A 5 et UZ 33 suivant traitement thermique, les différentes méthodes de mesure utilisées et la comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux. Enfin, pour compléter l'étude des déformations à froid, nous parlerons des essais de bulging avec rétreint.

Dans une deuxième partie, nous reviendrons sur le formage à chaud qui présente plus d'intérêt, compte tenu des grandes déformations que l'on peut obtenir. Nous essayerons de déterminer quels avantages industriels peut présenter le bulging à chaud en effectuant des essais simples.



PREMIERE PARTIE

\* \* \* \* \*  
\* B U L G I N G A F R O I D \*  
\* \* \* \* \*



## CHAPITRE I

### - Etude théorique du bulging à froid -

#### I.1. Introduction

L'emboutissage, qui consiste à transformer une feuille plane de métal de faible épaisseur et découpée en flans, en une surface non développable, à l'aide d'un outillage composé d'un poinçon, d'une matrice et d'un serre-flan, est une des opérations de formage les plus courantes de l'industrie. Un des grands problèmes de la production industrielle étant, aujourd'hui, l'optimisation des processus de fabrication et la réduction des coûts matières, il importe d'analyser soigneusement les conditions à remplir par le processus de fabrication et la matière. Vu la complexité du phénomène et la multiplicité des paramètres souvent inconnus (variation des coefficients de frottement en particulier), il n'est en général pas possible de connaître rigoureusement les contraintes et les déformations mises en jeu.

L'emboutissage par pression hydrostatique, ou "bulging", présente l'avantage de ne pas faire intervenir le frottement tôle-outillage. Le problème se trouve donc simplifié et peut être résolu à l'aide de la théorie de la plasticité.

De très nombreux essais, dont le bulging, ont été imaginés pour déterminer les courbes limites d'emboutissage et connaître l'aptitude à l'emboutissage des tôles minces [3] , [4] . On peut classer ces essais selon leur nature ou selon le mode de déformation prédominant :



1) les essais d'expansion biaxiale à flan bloqué sur la matrice :

- essais de gonflement par pression hydraulique, sans frottement (essais Jovignot ou bulging |5| , |6| ),

- essais d'expansion sur poinçon de forme sphérique, hémisphérique ou ellipsoïdal, avec frottement.

2) les essais de rétreint où le flan est maintenu par un serre-flan destiné à s'opposer à la formation de plis :

- essais de rétreint sur éprouvette de tôle de forme trapézoïdale,

- essais d'emboutissage de coupelles profondes à fond plat.

3) les essais mixtes :

Ce sont les essais les plus nombreux, ils font intervenir tous les modes de déformation ; le serre-flan freine le glissement sur tout ou partie de sa surface.

Des tentatives de calcul concernant le bulging ont été abordées par R. GLEYSAL |7|, R. HILL |8| , D.M. WOO |9| , B. STORAKERS |10| , N.A. NEIL et W.R. NEWMARK |11| , mais généralement ces auteurs supposaient qu'à chaque étape de la déformation le voile restait sphérique et l'épaisseur uniforme.

Dans ce travail, nous supposerons simplement que la déformée est une coque de révolution d'épaisseur variable. Pour le calcul des contraintes et des déplacements, nous procéderons de la même façon que BRANDON, en remplaçant les lois de la visco-élasticité par celles de l'élasto-plasticité.



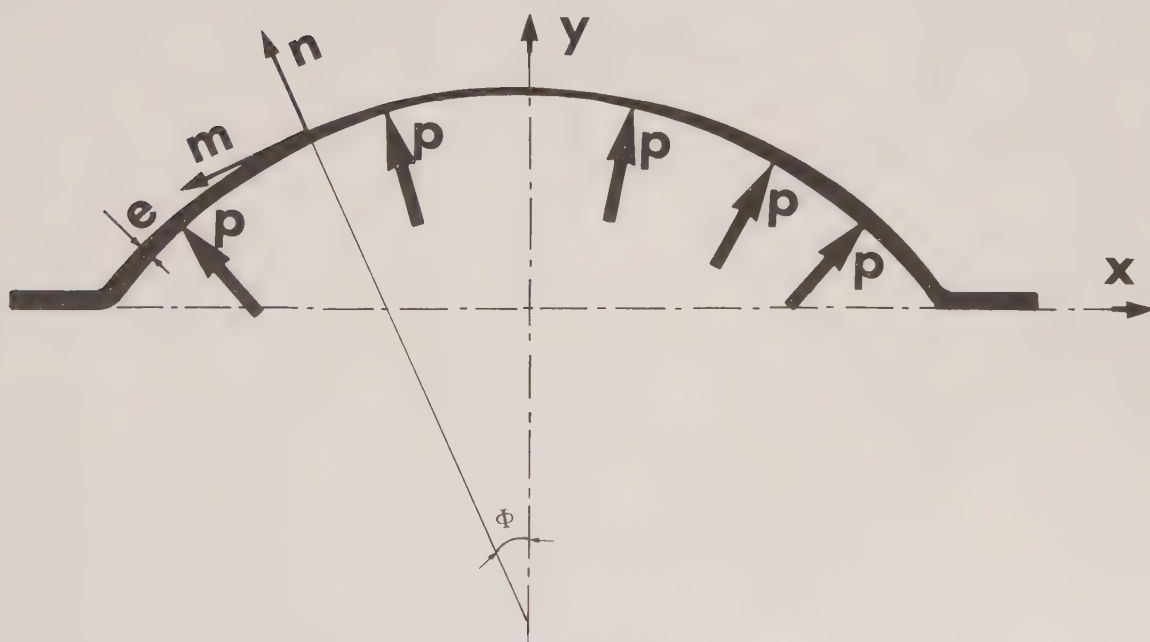
## I.2. Principe de la méthode de calcul.

Nous rappellerons l'état de contrainte existant dans une coque mince de révolution encastrée sur son bord et soumise à une pression hydrostatique  $P$  sur l'une de ses faces (fig.1).

La connaissance de cet état de contrainte nous permettra de déterminer les incréments de déformations dûs à un incrément de pression  $\delta P$ , à l'aide des lois d'écoulement plastique.

Nous montrerons qu'il est possible de déterminer le déplacement de chaque point de la coque par une méthode pas à pas compte tenu des conditions aux limites, d'où la nouvelle déformée. Ce calcul est beaucoup plus simple qu'un calcul par éléments finis utilisé par de nombreux auteurs [12] , [13] , [14] , [15] , [16].

Fig. 1 : coque mince de révolution soumise à une pression hydrostatique

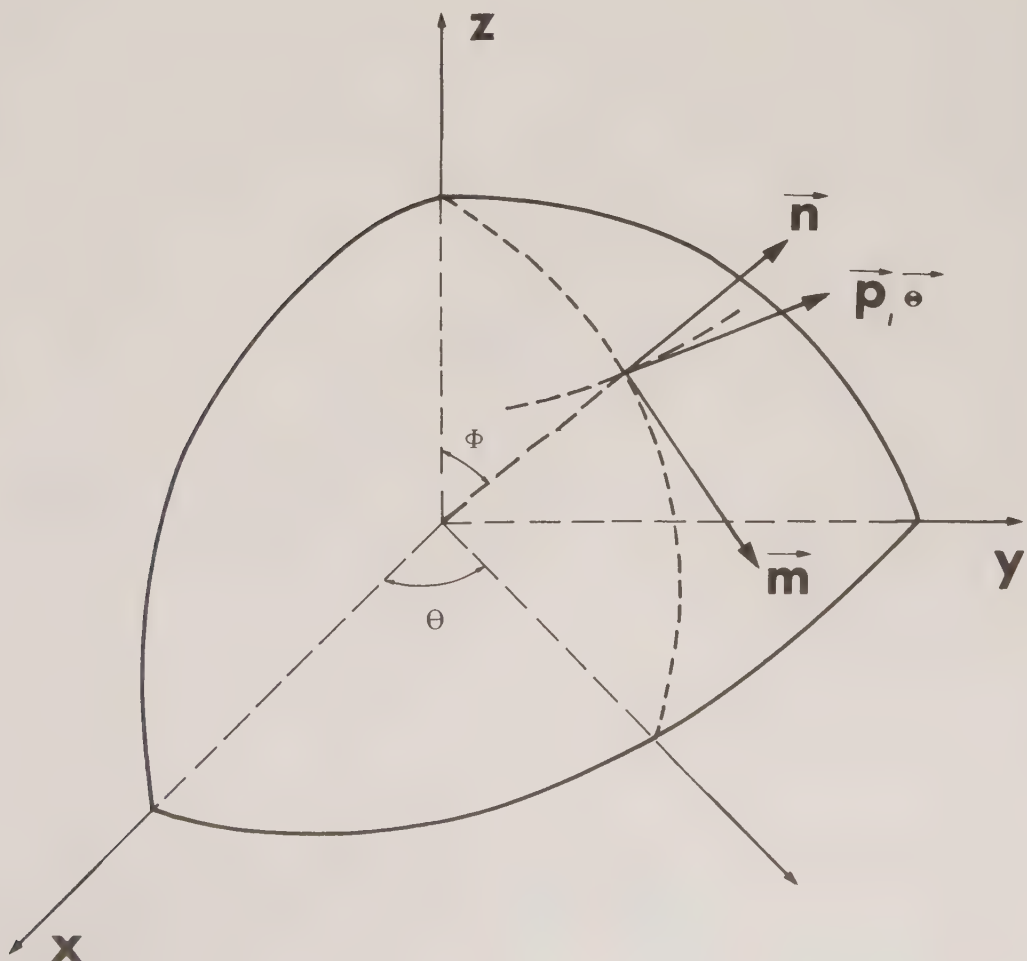




### I.2.1. Contraintes dans les voiles de révolution soumis à une pression interne

Nous cherchons à connaître l'état de contrainte d'une coque mince de révolution soumise à un chargement symétrique. Nous supposons le corps homogène, stable, isotrope et sollicité par un chargement de révolution. Les axes liés aux coordonnées curvilignes orthogonales formées par le méridien, le parallèle et la normale en un point, sont axes principaux de la quadrique des contraintes. De plus, la contrainte normale  $\sigma_n$  est négligeable devant les autres contraintes principales (fig. 2).

Fig. 2 : portion d'une surface de révolution

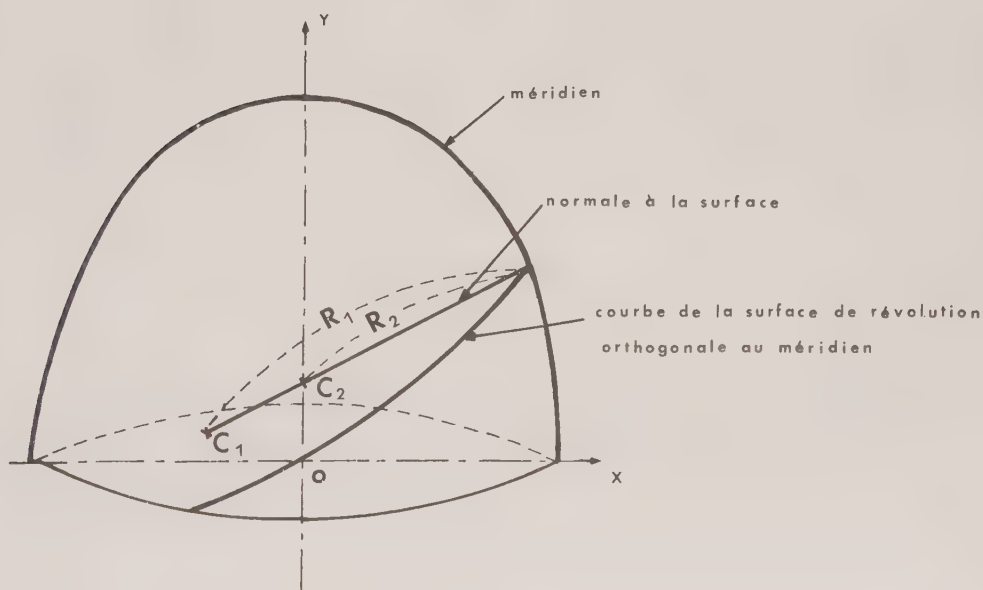




Nous allons utiliser quelques unes des propriétés des surfaces de révolution extraites des travaux de LECORNU [17].

Le dôme n'ayant pas une forme sphérique, nous avons en chaque point, deux rayons de courbure principaux  $R_1$  et  $R_2$ , le premier relatif au méridien, le second relatif à la courbe orthogonale au méridien en ce point (fig. 3). Lecornu a démontré que, pour les surfaces de révolution, le centre de courbure  $C_2$  se trouve à l'intersection de la normale et de l'axe de révolution Oy.

Fig. 3 : définition des deux rayons de courbure.



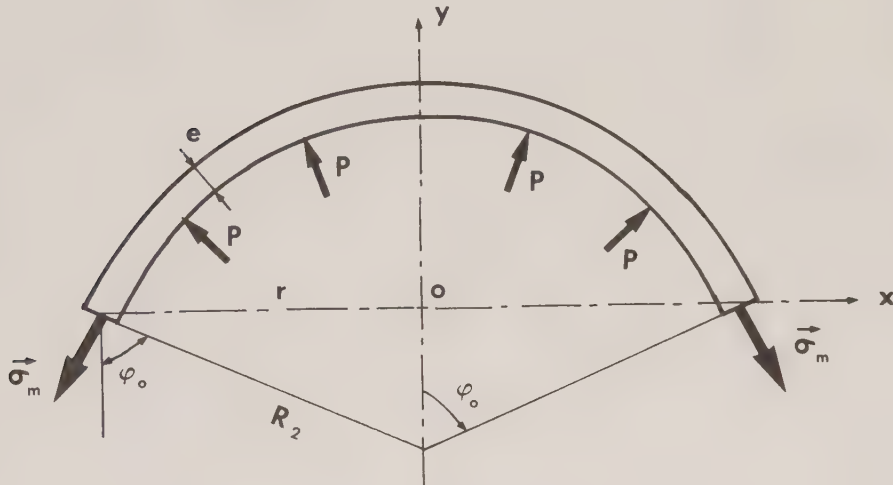
Soient  $N_p (= \sigma_p \cdot e)$  et  $N_m (= \sigma_m \cdot e)$  les tensions normales relatives respectivement au parallèle et au méridien.



Le problème étant axisymétrique (indépendant de l'angle  $\theta$ ), nous allons travailler en coordonnées cylindriques  $x, \theta, y$  ce qui nous permettra d'écrire plus simplement l'équation de la méridienne dans le plan  $x, y$  [18] .

Pour calculer  $N_m$ , écrivons que la portion de dôme limitée par l'angle  $\phi_0$  est en équilibre (fig. 4) suivant l'axe  $Oy$ .

Fig. 4 : calcul de la tension relative au méridien



L'épaisseur  $e$  est petite devant  $r$ . La force  $F$  résultant de l'action de la pression exercée sur la surface de la calotte est dirigée suivant  $Oy$  et s'écrit :

$$F = \pi r^2 P$$

La projection des efforts dûs à la contrainte  $\sigma_m$ , sur  $Oy$ , donne :

$$2 \pi r e \sigma_m \sin \phi_0$$

On écrit l'équilibre :



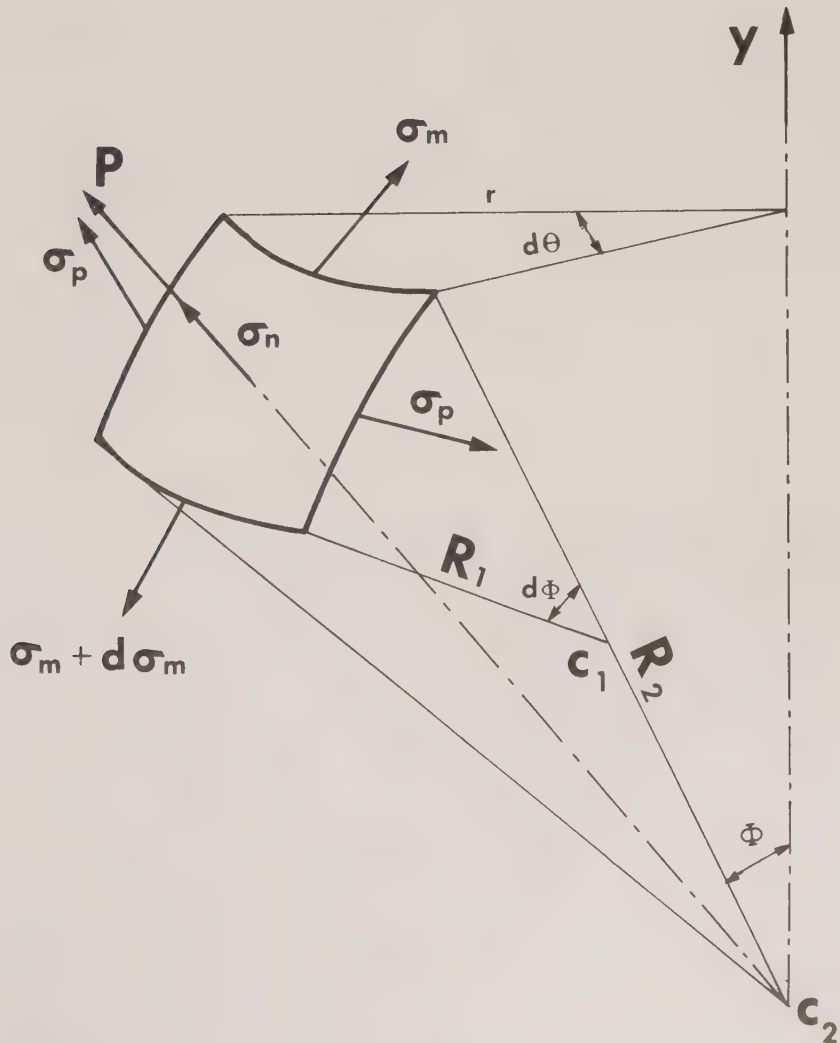
$$2 \pi r e \sigma_m \sin \phi_o = \pi r^2 P$$

Sachant que :  $r = R_2 \sin \phi_o$ , on en déduit :

$$N_m = \frac{PR_2}{2} \quad (1)$$

Ecrivons maintenant l'équilibre d'une portion quelconque de la surface du dôme (fig. 5). On projette les forces dans la direction normale  $\vec{n}$  :

Fig. 5 : équilibre d'une portion de la coque





$$N_m r d\theta \sin \frac{d\phi}{2} + (N_m + d N_m) (r + dr) d\theta \sin \frac{d\phi}{2} \\ + 2 N_p R_1 d\phi \sin \frac{d\theta}{2} \sin \left( \phi + \frac{d\phi}{2} \right) = P R_1 r d\phi d\theta$$

car  $\sigma_n$  est négligeable.

En négligeant les termes d'ordre égal ou supérieur à trois, on obtient :

$$N_m r + N_p R_1 \sin \left( \phi + \frac{d\phi}{2} \right) = P r R_1$$

or  $\sin \phi = \frac{r}{R_2}$  , d'où :

$$\frac{N_m}{R_1} + \frac{N_p}{R_2} = P \quad (2)$$

En combinant les relations (1) et (2) , on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = \frac{PR_2}{2e} \\ \sigma_p = \frac{PR_2}{e} \left( 1 - \frac{R_2}{2R_1} \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

Les rayons de courbure se déterminent facilement à partir de l'équation de la méridienne dans le plan (x,y), soit  $y = f(x)$ .

Le rayon de courbure relatif au méridien est donné par l'expression bien connue :

$$R_1 = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (4)$$



Le second rayon de courbure est obtenu en écrivant que le centre de courbure correspondant se situe à l'intersection de la normale à la courbe et de l'axe Oy.

$$R_2 = \frac{x}{\frac{dy}{dx}} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

La connaissance de l'équation de la courbe méridienne nous permet donc de connaître les rayons de courbure et l'état de contrainte dans la pièce soumise à la pression P.

#### I.2.2. Calcul des incréments de déformations

La déformation totale est la somme des déformations élastique et plastique. Bien que la déformation élastique soit souvent petite devant la déformation plastique, nous en tiendrons compte dans les calculs car nous avons constaté que, numériquement, elle jouait un rôle, surtout au début de la déformation.

La loi de PRANDTL-REUSS donne :

$$d \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d \sigma_{ii} \delta_{ij} + s_{ij} d \lambda .$$

Les deux premiers termes du second membre représentent la contribution élastique à la déformation, le troisième terme étant la contribution plastique.

#### \* Déformation élastique :

Les incréments de déformation sont donnés par la relation (déduite de la loi de Hooke généralisée) :

$$d \epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d \sigma_{ii} \delta_{ij}$$



Les relations (3) donnent, dans le repère principal :

$$d \sigma_{ii} = d \sigma_m + d \sigma_p = \frac{R_2}{2e} \left( 3 - \frac{R_2}{R_1} \right) dP$$

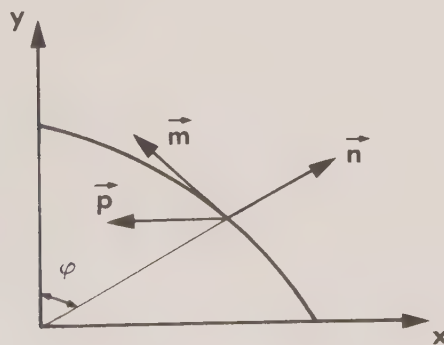
On pose :

$$R = \frac{R_2}{R_1}, \quad B = \frac{R_2}{2 E e}, \quad \text{d'où les incréments de déformation :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d \varepsilon_m^e = B (1 - \nu (2 - R)) dP \\ d \varepsilon_p^e = B (2 - R - \nu) dP \\ d \varepsilon_n^e = - B \nu (3 - R) dP \end{array} \right.$$

Ecrivons ce même tenseur en coordonnées cylindriques :  $x, \theta, y$ . Soit  $\phi$  l'angle fait par la normale à la surface avec l'axe de révolution  $y$  (fig. 6).

Fig. 6 : changement d'axes



La matrice de changement d'axes  $(\vec{m}, \vec{p}, \vec{n}) \rightarrow (\vec{y}, \vec{\theta}, \vec{x})$ , s'écrit :



$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix}$$

On en déduit le tenseur des incréments de déformation élastique en coordonnées cylindriques :

$$\begin{bmatrix} d \varepsilon_y^e & 0 & d \varepsilon_{xy}^e \\ 0 & d \varepsilon_\theta^e & 0 \\ d \varepsilon_{xy}^e & 0 & d \varepsilon_x^e \end{bmatrix} \quad \text{avec :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d \varepsilon_y^e = B (\sin^2 \phi + R\nu - 2\nu - \nu \cos^2 \phi) dP \\ d \varepsilon_x^e = B (\cos^2 \phi + R\nu - 2\nu - \nu \sin^2 \phi) dP \\ d \varepsilon_{xy}^e = -B (\nu + 1) \sin \phi \cos \phi dP \\ d \varepsilon_\theta^e = B (2 - R - \nu) dP \end{array} \right. \quad (7)$$

\* Déformation plastique :

Nous avons vu que les incréments de déformation plastique étaient donnés par la relation :

$$d \varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d \lambda \quad (8)$$

C'est l'équation de LEVY-MISES.

Cette relation liant l'incrément de déformation plastique à la contrainte et à l'incrément de contrainte, provient des lois d'écoulement en plasticité, et en particulier de l'utilisation du théo-



rème du travail maximal, du critère de Von Mises et de la loi d'écouissage |19| , |20| , |21|.

Les composantes  $s_{ij}$  du tenseur déviateur des contraintes  $T_s$  s'expriment en fonction des composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes  $T_\sigma$  par :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ij}$$

d'où le tenseur déviateur :

$$T_s = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_m - \sigma_p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_p - \sigma_m}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sigma_m - \sigma_p}{3} \end{bmatrix}$$

Les lois d'écouissage nous permettent de déterminer  $d\lambda$  :

$$d\lambda = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \frac{1}{H'} d\bar{\sigma}$$

$\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente.

$$\bar{\sigma} = 3 \sqrt{\frac{d}{\Sigma_2}} = (\sigma_m^2 + \sigma_p^2 + \sigma_m \sigma_p)^{1/2} \quad (9)$$

H est une fonction d'écouissage déterminée expérimentalement à partir de l'essai de traction puis généralisée à l'ensemble des modes de déformation |22| :  $\bar{\sigma} = H(\bar{\epsilon})$ .

On prend une fonction d'écouissage de la forme :

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \bar{\epsilon}^n$$



alors  $H' = \frac{\overline{d\sigma}}{\overline{d\varepsilon}} = \sigma_o n \frac{n-1}{\varepsilon}$

On en déduit que :

$$d\lambda = \frac{3}{2\sigma} \frac{d\bar{\sigma}}{\sigma_o n \frac{n-1}{\varepsilon}}$$

ou encore, en se servant des relations (3) et (9) :

$$d\lambda = \frac{3}{2n \sigma_o^{1/n}} \left( \frac{PR_2}{2e} \right)^{\frac{1-n}{n}} \left( 1 + \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 - \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \right)^{\frac{1-n}{2n}} \frac{dP}{P} \quad (10)$$

La relation (8) nous conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_m^p = \left( \frac{2\sigma_m - \sigma_p}{3} \right) d\lambda \\ d\varepsilon_p^p = \left( \frac{2\sigma_p - \sigma_m}{3} \right) d\lambda \\ d\varepsilon_n^p = \left( \frac{-\sigma_m - \sigma_p}{3} \right) d\lambda \end{array} \right.$$

En utilisant les équations (3) et (10) et en posant :

$$A = \frac{1}{2n \sigma_o^{1/n} \cdot P} \left( \frac{PR_2}{2e} \right)^{\frac{1-n}{n}} \left( 1 + (2 - R)^2 - (2 - R) \right)^{\frac{1-n}{2n}}$$

on obtient le tenseur des incréments de déformation plastique,

- dans le repère principal :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_m^p = A R dP \\ d\varepsilon_p^p = A (3 - 2R) dP \\ d\varepsilon_n^p = -A (3 - R) dP \end{array} \right.$$



- en coordonnées cylindriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} d \varepsilon_x^p = A (R - 3 \sin^2 \phi) d P \\ d \varepsilon_\theta^p = A (3 - 2 R) d P \\ d \varepsilon_y^p = A (R - 3 \cos^2 \phi) d P \\ d \varepsilon_{xy}^p = - 3 A \sin \phi \cos \phi d P \end{array} \right. \quad (11)$$

Enfin, les incréments de déformation totale découlent immédiatement des relations (7) et (11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d \varepsilon_x = \left[ B (\cos^2 \phi + R\nu - 2\nu - \nu \sin^2 \phi) + A (R - 3 \sin^2 \phi) \right] d P \\ d \varepsilon_\theta = \left[ B (2 - R - \nu) + A (3 - 2 R) \right] d P \\ d \varepsilon_y = \left[ B (\sin^2 \phi + R\nu - 2\nu - \nu \cos^2 \phi) + A (R - 3 \cos^2 \phi) \right] d P \\ d \varepsilon_{xy} = - \sin \phi \cos \phi \left[ B (\nu + 1) + 3 A \right] d P \end{array} \right. \quad (12)$$

Dans ce paragraphe, nous venons de montrer que si on provoque un incrément de pression  $d P$  sur une pièce déjà soumise à une pression  $P$  et dont on connaît l'équation de la méridienne, l'épaisseur et la loi d'écrouissage, il est possible d'en déduire les incréments de déformation  $d \varepsilon_{ij}$ .

Dans le calcul numérique, on ne peut que provoquer des accroissements de pression  $\delta P$  finis et non pas des incréments  $d P$ . Il devient nécessaire d'utiliser une technique de calcul pas à pas.

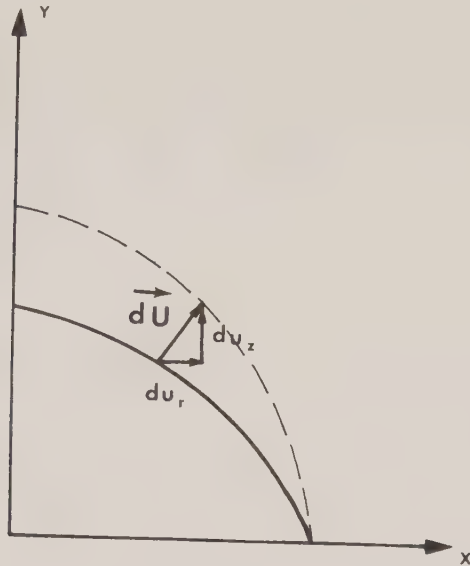
### I.2.3. Détermination des déplacements :

Connaissant les composantes du tenseur des incréments de déformation en coordonnées cylindriques, nous allons montrer qu'il est possible de déterminer le déplacement de tous les points de la coque, à partir des conditions aux limites du problème.



Soit  $\vec{dU}$  (fig. 7) l'accroissement du vecteur déplacement de composantes  $(d u_x, 0, d u_y)$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{\theta}, \vec{y})$ .

Fig. 7 : déplacement d'un point de la méridienne



Les incréments de déformation s'expriment en fonction des accroissements de déplacement par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} d \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} d u_x \\ d \epsilon_\theta = \frac{d u_x}{x} \\ d \epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} (d u_y) \\ d \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d u_x}{\partial y} + \frac{\partial d u_y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (13)$$



On utilise les relations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} d (d u_x) = \frac{\partial}{\partial x} (d u_x) dx + \frac{\partial}{\partial y} (d u_x) dy \\ d (d u_y) = \frac{\partial}{\partial x} (d u_y) dx + \frac{\partial}{\partial y} (d u_y) dy \end{array} \right. \quad (14)$$

On constate que si on connaît les incréments de déformation, on peut, à partir d'un point particulier dont on connaît le déplacement, déterminer le déplacement de tout autre point de proche en proche en combinant les équations (13) et (14).

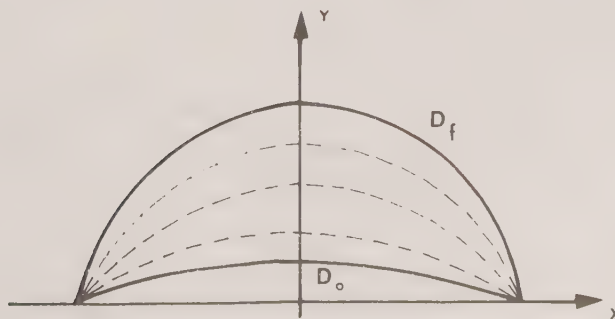
### I.3. Résolution numérique

#### I.3.1. Méthode pas à pas :

Nous venons de voir dans le chapitre précédent qu'il est possible, si l'on connaît la déformée, la pression de service, les lois d'écoulement, et les conditions aux limites, de calculer les déplacements de chaque point de la coque, provoqués par un accroissement de pression  $\delta P$ .

Partant d'une déformée initiale  $D_0$  et d'une pression  $P_0$ , nous allons obtenir une déformée finale  $D_f$  lorsque la pression appliquée sera  $P_f$  (fig. 8).

Fig. 8 : Discrétisation de l'intervalle de pression





Les équations précédentes portant sur des différentielles, il convient donc de discrétiser l'intervalle de pression  $P_f - P_o$ .

Nous avons vu, d'autre part, qu'il fallait aussi discrétiser la méridienne pour calculer les déplacements des points de proche en proche.

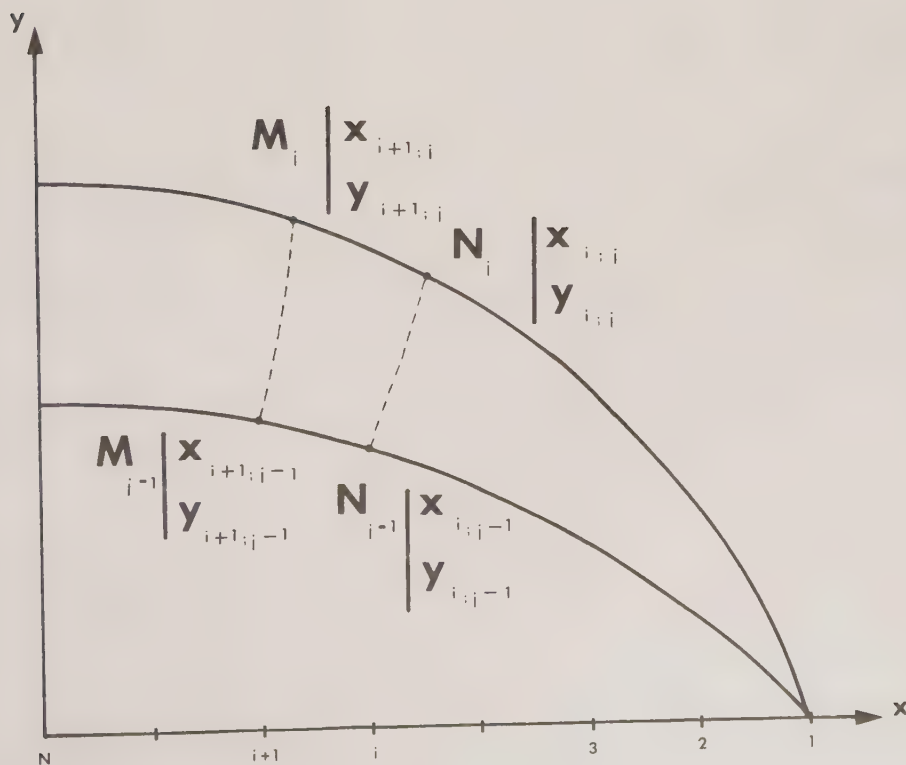
Nous allons donc introduire deux indices  $i$  et  $j$ , le premier repérant la position spatiale du point, le second la pression considérée.

Ainsi,  $dV_{i,j}$  représente l'accroissement de la variable  $V$  calculé au point d'indice  $i$  provoqué par l'accroissement de pression  $\delta P_j$  :

$$V_{i,j} = V_{i,j-1} + dV_{i,j}.$$

On discrétise donc la déformée initiale en  $N$  points dont on suivra l'évolution en fonction de la pression (fig. 9).

Fig. 9 : évolution de la méridienne





Toutes les relations trouvées aux paragraphes précédents s'écrivent donc avec des doubles indices :

- rayons de courbure :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1i,j} = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)_{i,j}^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}_{i,j}} \\ R_{2i,j} = \frac{x_{i,j}}{\left( \frac{dy}{dx} \right)_{i,j}} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)_{i,j}^2 \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (15)$$

- contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{mi,j} = \frac{P_j \cdot R_{2i,j}}{2 e_{i,j}} \\ \sigma_{pi,j} = \frac{P_j \cdot R_{2i,j}}{e_{i,j}} \left( 1 - \frac{R_{2i,j}}{2 R_{1i,j}} \right) \end{array} \right. \quad (16)$$

- accroissements de déformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varepsilon_{xi,j} = \left[ B_{i,j} (\cos^2 \phi_{i,j} + R_{i,j} \nu - 2\nu - \nu \sin^2 \phi_{i,j}) + A_{i,j} (R_{i,j} - 3 \sin^2 \phi_{i,j}) \right] \delta P_j \\ \delta \varepsilon_{yi,j} = \left[ B_{i,j} (\sin^2 \phi_{i,j} + R_{i,j} \nu - 2\nu - \nu \cos^2 \phi_{i,j}) + A_{i,j} (R_{i,j} - 3 \cos^2 \phi_{i,j}) \right] \delta P_j \\ \delta \varepsilon_{\theta i,j} = \left[ B_{i,j} (2 - R_{i,j} - \nu) + A_{i,j} (3 - 2 R_{i,j}) \right] \delta P_j \\ \delta \varepsilon_{xy i,j} = - \sin \phi_{i,j} \cos \phi_{i,j} \left[ B_{i,j} (\nu + 1) + 3 A_{i,j} \right] \delta P_j \end{array} \right. \quad (17)$$

avec :

$$B_{i,j} = \frac{R_{2i,j}}{2E e_{i,j}}$$



$$A_{i,j} = \frac{1}{2n \sigma_O^{1/n} P_j} \left( \frac{P_j \cdot R_{2i,j}}{2 e_{i,j}} \right)^{1/n} \left[ 1 + (2-R_{i,j})^{2-(2-R_{i,j})} \right]^{\frac{1-n}{2n}}$$

- déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varepsilon_{x_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial x} \delta u_{x_{i,j}} \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varepsilon_{\theta_{i,j}} = \delta u_{x_{i,j}} / x_{i,j-1} \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varepsilon_{y_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial y} \delta u_{y_{i,j}} \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varepsilon_{x y_{i,j}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_{x_{i,j}}}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_{y_{i,j}}}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\delta u_{x_{i,j}}) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_{x_{i,j}}) \left( \frac{dx}{dy} \right)_{i,j-1} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_{x_{i,j}}) \right] dy_{i,j-1} \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\delta u_{y_{i,j}}) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_{y_{i,j}}) \left( \frac{dx}{dy} \right)_{i,j-1} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_{y_{i,j}}) \right] dy_{i,j-1} \end{array} \right. \quad (23)$$

on pose :  $f' = \frac{dy}{dx}$

Des relations (22) et (23), on tire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (\delta u_{x_{i,j}}) + \frac{d}{dy} (\delta u_{y_{i,j}}) f'_{i,j-1} &= \delta \varepsilon_{x_{i,j}} \frac{1}{f'_{i,j-1}} \\ &+ \delta \varepsilon_{y_{i,j}} \cdot f'_{i,j-1} + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_{x_{i,j}}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_{y_{i,j}}) \end{aligned}$$

La définition de la dérivée nous donne :

$$\frac{d}{dy} (\delta u_{x_{i,j}}) = \left[ (\delta u_x)_{i+1,j} - (\delta u_x)_{i,j} \right] \frac{1}{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}} \quad (24)$$



$$\frac{d}{dy} (\delta u_{y_{i,j}}) = [(\delta u_y)_{i+1,j} - (\delta u_y)_{i,j}] \frac{1}{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}}$$

d'où :

$$\begin{aligned} & [(\delta u_x)_{i+1,j} - (\delta u_x)_{i,j}] \frac{1}{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}} + [(\delta u_y)_{i+1,j} - (\delta u_y)_{i,j}] \frac{f'_{i,j-1}}{y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}} \\ &= \frac{\delta \epsilon_{x_{i,j}}}{f'_{i,j-1}} + \delta \epsilon_{y_{i,j}} f'_{i,j-1} + 2 \delta \epsilon_{xy_{i,j}} \end{aligned}$$

On a finalement le système (25) :

$$\left\{ \begin{aligned} & \delta u_{x_{i+1,j}} - \delta u_{x_{i,j}} + f'_{i,j-1} (\delta u_{y_{i+1,j}} - \delta u_{y_{i,j}}) = (y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) \\ & \quad \cdot \left( \frac{\delta \epsilon_{x_{i,j}}}{f'_{i,j-1}} + \delta \epsilon_{y_{i,j}} f'_{i,j-1} + 2 \delta \epsilon_{xy_{i,j}} \right) \\ & \delta u_{x_{i,j}} = x_{i,j-1} \cdot \delta \epsilon_{\theta_{i,j}} \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Pour chaque pression  $P_j$ , c'est-à-dire chaque étape du calcul, on peut écrire N systèmes du type (25). On constate, comme prévu, que si l'on connaît le déplacement d'un point particulier, on peut déterminer celui de tous les autres.

Le bord du flan est encastré, donc :

$$\delta u_{x_{1,j}} = \delta u_{y_{1,j}} = 0, \quad \forall j.$$

Le vecteur déplacement cherché  $[\delta U] = [\delta u_{x_1}, \delta u_{y_1}, \dots, \delta u_{x_N}, \delta u_{y_N}]^T$  est donc solution du système matriciel :



$$[\delta U] = [Q]^{-1} [D] \quad (26)$$

où la matrice  $[Q]$  et le vecteur  $[D]$  sont donnés par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ -1 & -f'_1 & 1 & f'_1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & -f'_2 & 1 & f'_2 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & -1 & -f'_{N-2} & 1 & f'_{N-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -f'_{N-1} & 1 & f'_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta u_{x_1} \\ \delta u_{y_1} \\ x_2 \cdot \delta \epsilon_{\theta_2} \\ (y_2 - y_1) \left( \delta \epsilon_{y_1} \cdot f'_1 + 2 \delta \epsilon_{xy_1} + \frac{\delta \epsilon_{x_1}}{f'_1} \right) \\ x_3 \cdot \delta \epsilon_{\theta_3} \\ (y_3 - y_2) \left( \delta \epsilon_{y_2} \cdot f'_2 + 2 \delta \epsilon_{xy_2} + \frac{\delta \epsilon_{x_2}}{f'_2} \right) \\ \vdots \\ x_N \cdot \delta \epsilon_{\theta_N} \\ (y_N - y_{N-1}) \left( \delta \epsilon_{y_{N-1}} \cdot f'_{N-1} + 2 \delta \epsilon_{xy_{N-1}} + \frac{\delta \epsilon_{x_{N-1}}}{f'_{N-1}} \right) \end{bmatrix}$$



### I.3.2. Calcul des nouvelles coordonnées et de la nouvelle épaisseur :

Connaissant les déplacements  $[\delta u_{x_{i,j}}, \delta u_{y_{i,j}}]$  de chaque point  $i$ , à chaque étape  $j$ , on peut écrire les nouvelles coordonnées des points en fonction des coordonnées de l'étape  $j-1$  :

$$\begin{cases} x_{i,j} = x_{i,j-1} + \delta u_{x_{i,j}} \\ y_{i,j} = y_{i,j-1} + \delta u_{y_{i,j}} \end{cases} \quad (27)$$

Par définition :  $\delta \epsilon_{n_{i,j}} = \log \frac{e_{i,j}}{e_{i,j-1}}$  .

On en déduit immédiatement la nouvelle épaisseur :

$$e_{i,j} = e_{i,j-1} \cdot \exp (\delta \epsilon_{n_{i,j}}) \quad (28)$$

Il suffit maintenant de faire passer une courbe d'équation  $y = f(x)$  au mieux par tous les points  $(x_{i,j}, y_{i,j})$ . Nous aurons l'équation de la nouvelle méridienne. Nous pouvons appliquer un nouvel accroissement de pression  $\delta P_{j+1}$  à la coque ainsi obtenue et recommencer les calculs.

### I.3.3. Différentes approximations de la méridienne :

Nous venons d'obtenir les coordonnées des  $N$  points de la courbe cherchée. Il s'agit maintenant de trouver son équation analytique qui nous permettra de calculer les rayons de courbure.

BRANDON a assimilé la déformée à une conique d'équation :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0$$

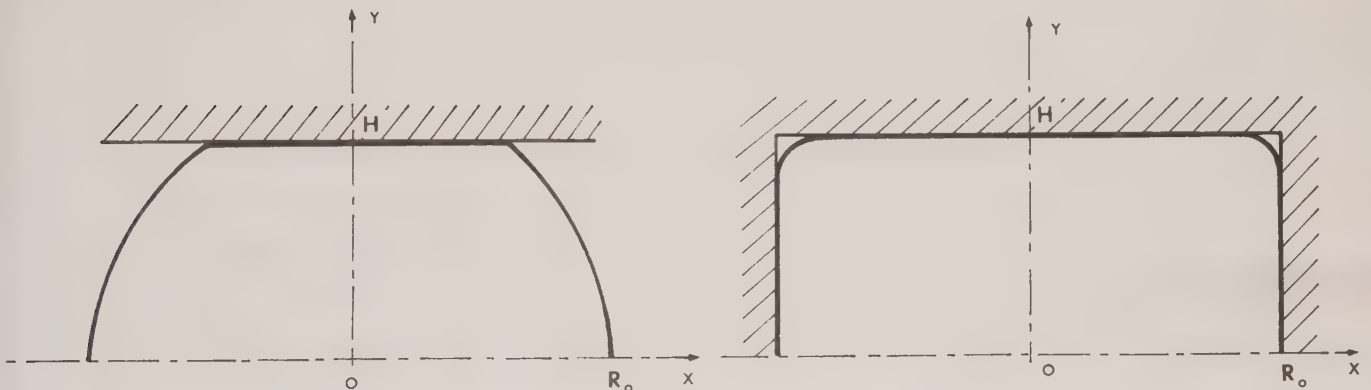
et les essais effectués à chaud ont montré que cette approximation était parfaitement justifiée.



Dans le cas du bulging à froid, nous avons voulu procéder de façon plus générale en utilisant une méthode d'approximation polynominale. Ce choix présente deux avantages :

- d'une part, donner une meilleure approximation de la déformée réelle dans le cas où celle-ci ne serait pas une conique (les calculs ont été faits en partie avant les essais),
- d'autre part, avoir la possibilité d'utiliser cette même approximation lorsqu'on travaille en "bulging limité", c'est-à-dire lorsqu'on limite la déformation par un plan de cote  $y = H$  ou par un cylindre de rayon  $R_0$  (fig. 10).

Fig. 10 : Bulging limité



Polynôme de degré quelconque :

La méthode consiste à déterminer le degré du polynôme qui passe au mieux, selon un certain critère, par les  $N$  points. Nous utilisons un sous-programme qui calcule les coefficients des polynômes de degré 2 à 16 et choisit le meilleur d'après la méthode des moindres carrés.



Nous procédons de la façon suivante :

- la déformée étant symétrique par rapport à l'axe Oy, la fonction  $y = f(x)$  est paire et on peut poser :  $w = x^2$ .
- pour  $x = R_0$  ( $R_0$  : rayon d'encastrement),  $y = 0$ , donc  $(R_0^2 - x^2)$  est en facteur dans le polynôme.
- on pose :  $z = \frac{y}{R_0^2 - w}$  .
- il suffit d'appliquer le sous-programme précédemment cité aux variables  $w$  et  $z$  ; on obtient un polynôme :

$$z = a_{16} w^{16} + a_{15} w^{15} + \dots + a_1 w + a_0$$

ce qui se traduit par :

$$y = (R_0^2 - x^2) (a_{16} x^{32} + a_{15} x^{30} + \dots + a_1 x^2 + a_0)$$

Les premiers résultats du calcul nous ont montré qu'il était absurde de choisir un polynôme de degré trop élevé ; en effet, le sous-programme nous donnait presque toujours le polynôme de degré le plus fort, ainsi il n'y avait pratiquement pas d'erreur sur les points ; cependant, cette façon de procéder ne produisait pas le lissage souhaité mais des oscillations de la courbe qui perturbaient la suite du déroulement des calculs (rayons de courbure changeant de signe).

Pour y remédier, dans un premier temps, nous avons imposé un polynôme  $z = g(w)$  de degré minimum compatible avec le sous-programme, c'est-à-dire égal à deux. On obtenait alors un polynôme en  $y$  de la forme :

$$y = (R_0^2 - x^2) (a x^4 + b x^2 + c) \quad (29)$$

Les résultats bien qu'améliorés, n'étaient pas encore suffisants. Il nous a fallu créer un programme pour un polynôme de degré 4 seulement.



Polynôme de degré 4 :

Ce polynôme doit se présenter sous la forme :

$$y = (R_0^2 - x^2) (a x^2 + b) \quad (30)$$

Nous écrivons que l'équation  $y = (R_0^2 - x^2) (a x^2 + b)$  doit être vérifiée pour les N points. Nous obtenons le système surabondant de N équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = (R_0^2 - x_1^2) (a x_1^2 + b) \\ \vdots \\ y_N = (R_0^2 - x_N^2) (a x_N^2 + b) \end{array} \right.$$

Pour déterminer a et b, nous utilisons la méthode des moindres carrés.

Nous introduisons le vecteur d'erreur  $[\epsilon]$  tel que :

$$\epsilon_i = y_i - (R_0^2 - x_i^2) (a x_i^2 + b), \quad i \in [1, N] \quad .$$

Il suffit de minimiser la quantité  $T_{\epsilon \epsilon}$  par rapport à a et b.

La résolution du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{\epsilon \epsilon}}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial T_{\epsilon \epsilon}}{\partial b} = 0 \end{array} \right.$$

nous donne a et b.

C'est le polynôme  $y = (R_0^2 - x^2) (a x^2 + b)$  qui nous a donné les meilleurs résultats compatibles avec l'expérience.



#### 1.3.4. Déformée initiale

La méthode de calcul utilisée nécessite la connaissance d'une courbe initiale. Il n'est pas possible de partir d'un flan plan, car les rayons de courbure seraient alors infinis. Il est donc nécessaire de s'imposer une déformée de départ. Deux cas ont été envisagés.

##### 1. Déformée de Timoshenko :

Partant de l'idée que la déformée présente toujours des tangentes horizontales à l'encastrement, nous avons utilisé l'équation d'une déformée, donnée par TIMOSHENKO dans son ouvrage "théorie des plaques et des coques" [23], déformée qui dépend à la fois de la pression initiale appliquée  $P R_0$  et des caractéristiques mécaniques  $\nu$  et  $E$  du matériau. Cette équation est la suivante :

$$y_i = \frac{3 (1 - \nu^2) (R_0^2 - x_i^2)^2}{16 e^3 E} P R_0, \quad i \in [1, N] \quad (31)$$

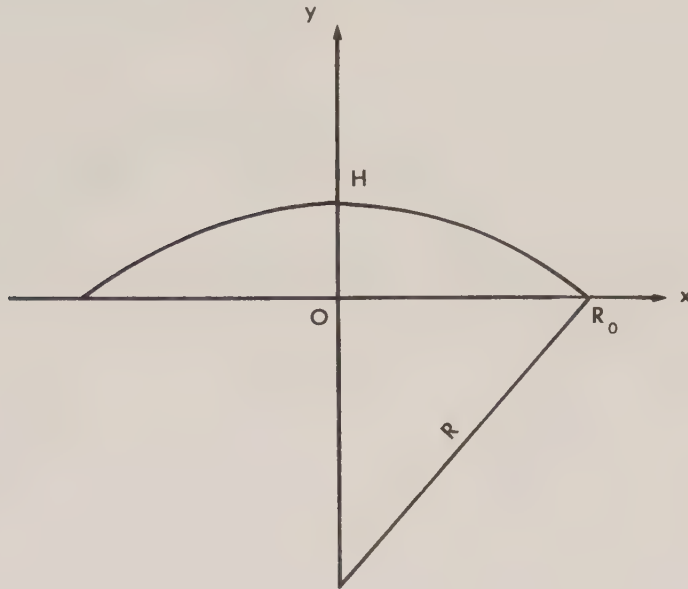
Mais comme la dérivée s'annule aux points 1 et N, il y a inversion de la concavité de la courbe. Il existe alors un point où les contraintes s'annulent, ce qui amène de nombreuses perturbations dans le programme et une impossibilité de poursuivre les calculs.

##### 2. Déformée sphérique :

Puisque la déformée de Timoshenko, bien que théoriquement satisfaisante, ne convient pas, pratiquement, à nos calculs, nous avons décidé de prendre comme GLEYSAL [24], une déformée sphérique (fig. 11).



Fig. 11 : Déformée initiale sphérique



Connaissant  $H$  et  $R_0$ , nous en déduisons le rayon  $R$  de la courbe :

$$R = \frac{R_0^2 + H^2}{2H} .$$

Pour éviter d'avoir des problèmes au début de la déformation en imposant n'importe quelle pression initiale  $P R_0$  à une coque de hauteur initiale  $H$  donnée, nous avons calculé cette hauteur  $H$  en fonction de la pression  $P R_0$ , grâce à la relation (31) de Timoshenko.

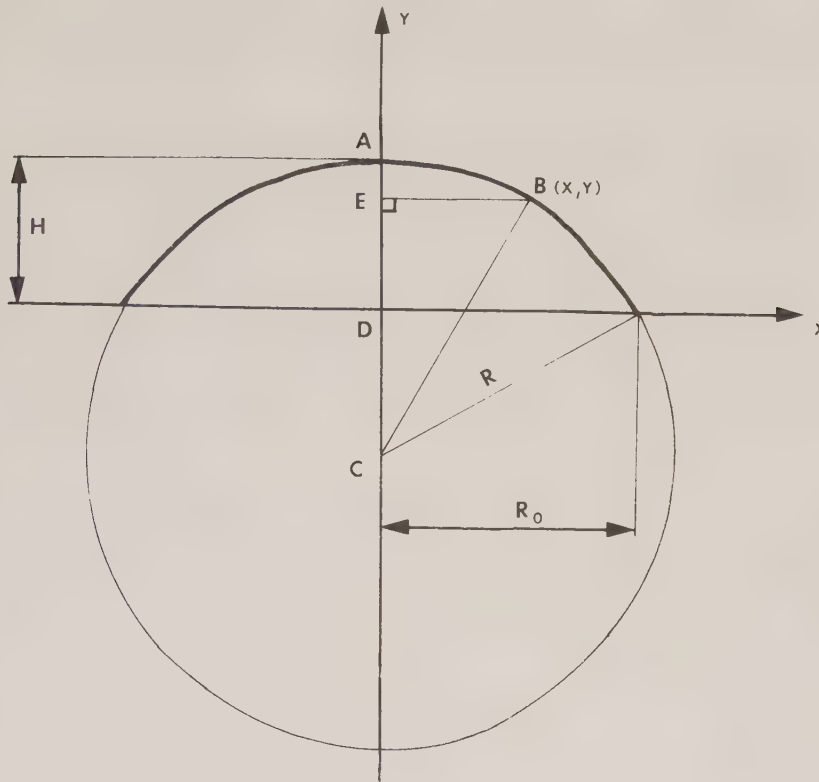
C'est-à-dire :

$$H = \frac{3 (1 - \nu^2) R_0^4}{16 e^3 E} P R_0 \quad (32)$$

Il est facile de donner l'équation du cercle  $y = f(x)$  en fonction de  $H$  et  $R_0$  (fig. 12).



Fig. 12 : équation du cercle



$$y = \sqrt{R^2 - x^2} + H - R$$

$$\text{ou encore : } y = \left[ \left( \frac{R_0^2 + H^2}{2H} \right)^2 - x^2 \right]^{1/2} + H - \frac{R_0^2 + H^2}{2H} \quad (33)$$

L'utilisation d'une déformée initiale sphérique nous a donné de bons résultats, sauf sur le bord où la tangente n'est pas horizontale. Mais nous savions déjà que les résultats sur les bords ne peuvent être qu'erronés, car la théorie des coques minces ne peut être utilisée dans le cas où un encastrement existe [23] .

#### 1.3.5. Organigramme :

Nous possédons maintenant tous les éléments permettant de résoudre numériquement le problème. Pour faciliter la compréhension de l'organigramme, il faut préciser que nous n'imprimons pas les résultats après chaque étape (repérée par IC), mais seulement toutes les "NE" itérations.



D'autre part, après chaque écriture, nous enregistrons les résultats sur fichiers ce qui nous permet d'arrêter le déroulement du calcul et de le reprendre plus tard où nous l'avons laissé. .

Enfin, l'assimilation des dérivées à des différences finies (§ I.3.1.) ne se justifie que si on prend des accroissements de pression  $\delta P$  "très petits". C'est pour cette raison que nous avons introduit un test sur l'accroissement de la déformée équivalente à chaque étape. Si cet accroissement est supérieur à une valeur fixée, on recommence les calculs de l'étape après avoir divisé l'incrément de pression par deux.

L'organigramme est donné fig. 13.



Lecture des données sur cartes :

- hauteur et épaisseur initiales de la plaque
- rayon d'encastrement
- nombre de points utilisés : NPOINT
- valeurs de la pression initiale  $P_0$ , de l'incrément de pression  $\delta P_0$
- valeurs du module d'Young, du coefficient de Poisson, de la limite élastique, de l'exposant de la courbe de traction
- nombre d'itérations : NIT, écriture toutes les NE itérations
- valeur de l'indicateur IND (0 : début du calcul, 1 : poursuite du calcul)

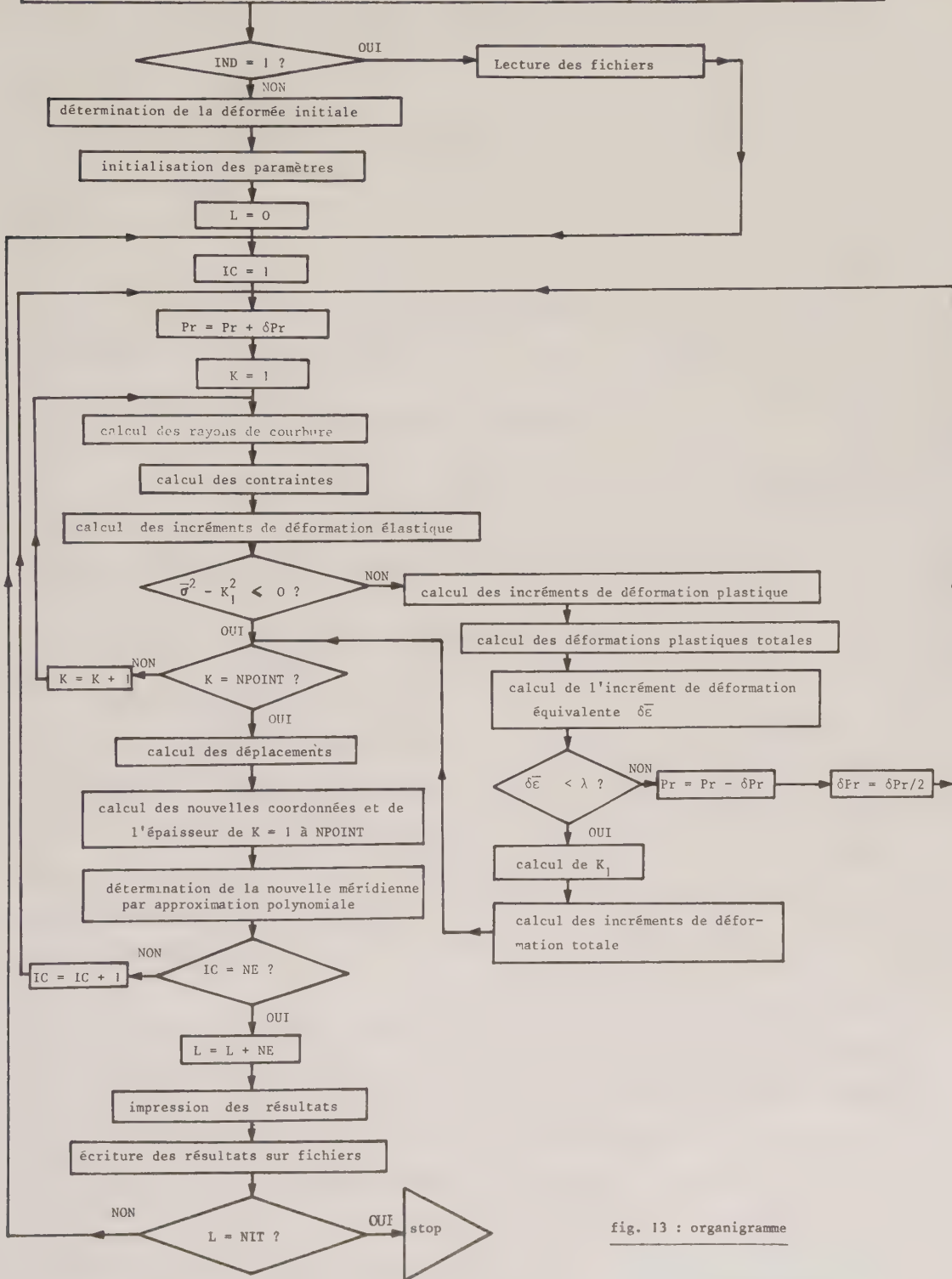


fig. 13 : organigramme



#### I.4. Résultats théoriques :

##### I.4.1. Données :

Nous utilisons des flans de diamètre utile 76 mm, d'épaisseur 0,6 mm, 0,8 mm et 1 mm.

Nous avons d'abord travaillé sur l'aluminium commercial, puis sur A5, enfin sur le laiton UZ 33 très employé industriellement pour l'emboutissage profond.

Les valeurs de la limite d'élasticité  $\sigma_0$ , du module d'Young  $E$  et de l'exposant de la loi d'écrouissage  $n$ , pour différents états du matériau sont déterminées par des essais de traction (voir § II.2).

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est égal à 0,34.

Nous avons fait varier le nombre de points discrétisant la méridienne (NPOINT), la pression initiale ( $PR_0$ ) et l'incrément de pression ( $DPR_0$ ), pour voir leur influence sur les résultats.

##### I.4.2. Influence des divers paramètres :

###### Remarques préliminaires :

Les calculs ont été faits sur les ordinateurs MITRA 15 du Laboratoire de Mécanique Appliquée et IRIS 50, du centre universitaire de calcul. Le passage en double précision n'a donné de différence, en fin de calcul, que sur le quatrième et dernier chiffre significatif. Par la suite, nous avons donc effectué tous les calculs en simple précision, ce qui est beaucoup plus rapide et moins onéreux.

Au départ, nous avons décidé de "suivre" les points matériels tout au long du déroulement du programme (description Lagrangienne du mouvement). C'est-à-dire qu'à l'issue de chaque itération identifiée par l'indice IC, nous prenons comme déformée initiale pour l'étape suivante, la déformée obtenue en prenant en compte les coordonnées  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in [1, \text{NPOINT}]$ , calculées pendant l'itération. Ce processus donne toute satisfaction dans les premières phases de la déformation, mais en fin de calcul, nous obtenons un ressèment des points représentatifs de la méridienne dans la partie centrale de la



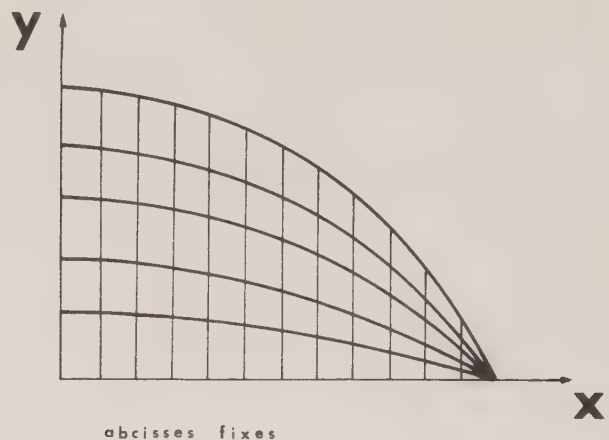
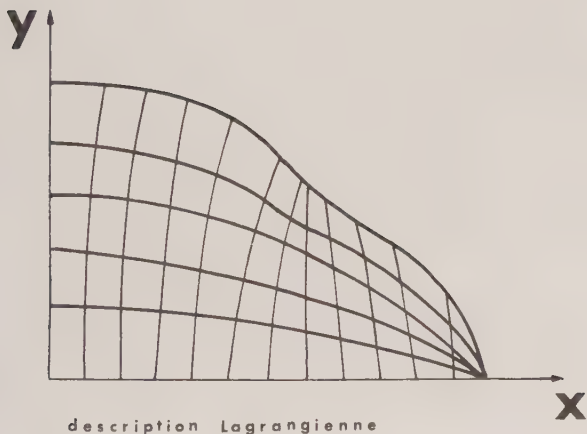
courbe. Ce phénomène non expliqué conduit à des calculs incompatibles avec les résultats expérimentaux (fig. 14).

Pour tenter de remédier à ce problème, nous avons préféré considérer des points courants repérés par des abscisses fixes : après avoir donné l'équation  $y = f(x)$  de la méridienne calculée au moyen des coordonnées  $(x_i, y_i)$  obtenues à la fin de l'étape, nous utilisons pour l'étape suivante, les points  $(x_{i0}, f(x_{i0}))$  de la méridienne, d'abscisses fixes  $x_{i0}$  équidistantes (fig. 15).

Cette dernière solution donne des résultats en accord avec l'expérience, tout au long de la déformation.

fig. 14 : points matériels

fig. 15 : abscisses équidistantes



#### Influence du nombre de points :

Faut-il discrétiser la méridienne en un très grand nombre de points ou en un minimum de points ?

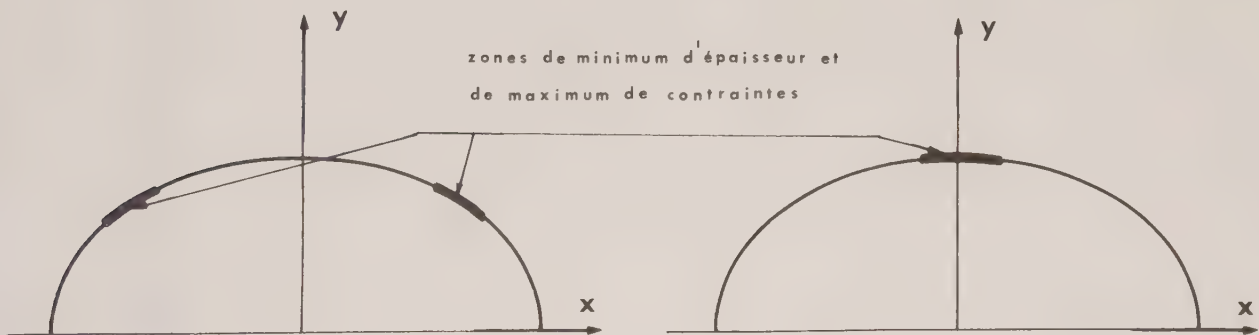
Au départ, nous avons choisi la première solution en apparence plus précise. Or en travaillant à abscisses mobiles, c'est-à-dire en suivant les points matériels au cours de la déformation, nous avons constaté que plus il y avait de points, plus le phénomène d'incurvation de la courbe se produisait tôt et avec amplitude.



De même, en travaillant à abscisses fixes, bien qu'il n'y ait plus d'incurvation de la méridienne, il apparaissait à partir d'une certaine pression (liée au nombre de points) une zone d'épaisseur minimale et de contraintes maximales sur le côté de la courbe (fig. 16). Or expérimentalement, de même qu'il n'y a pas de changement de signe de la concavité, la zone de minimum d'épaisseur se situe au sommet du dôme (fig. 17). En prenant au maximum 10 points sur le rayon, la pression pour laquelle se produit ce phénomène est supérieure à la pression de rupture et l'étude n'entre plus dans le cadre de nos travaux.

Fig. 16 : discrétisation en un grand nombre de points

Fig. 17 : discrétisation en un faible nombre de points



L'influence de NPOINT est donnée sur les courbes fig. 18 pour la déformée, fig. 19 pour l'épaisseur. Par la suite, nous avons fait les calculs en prenant 8 points.



**Fig 18: Influence de NPOINT sur la déformée**

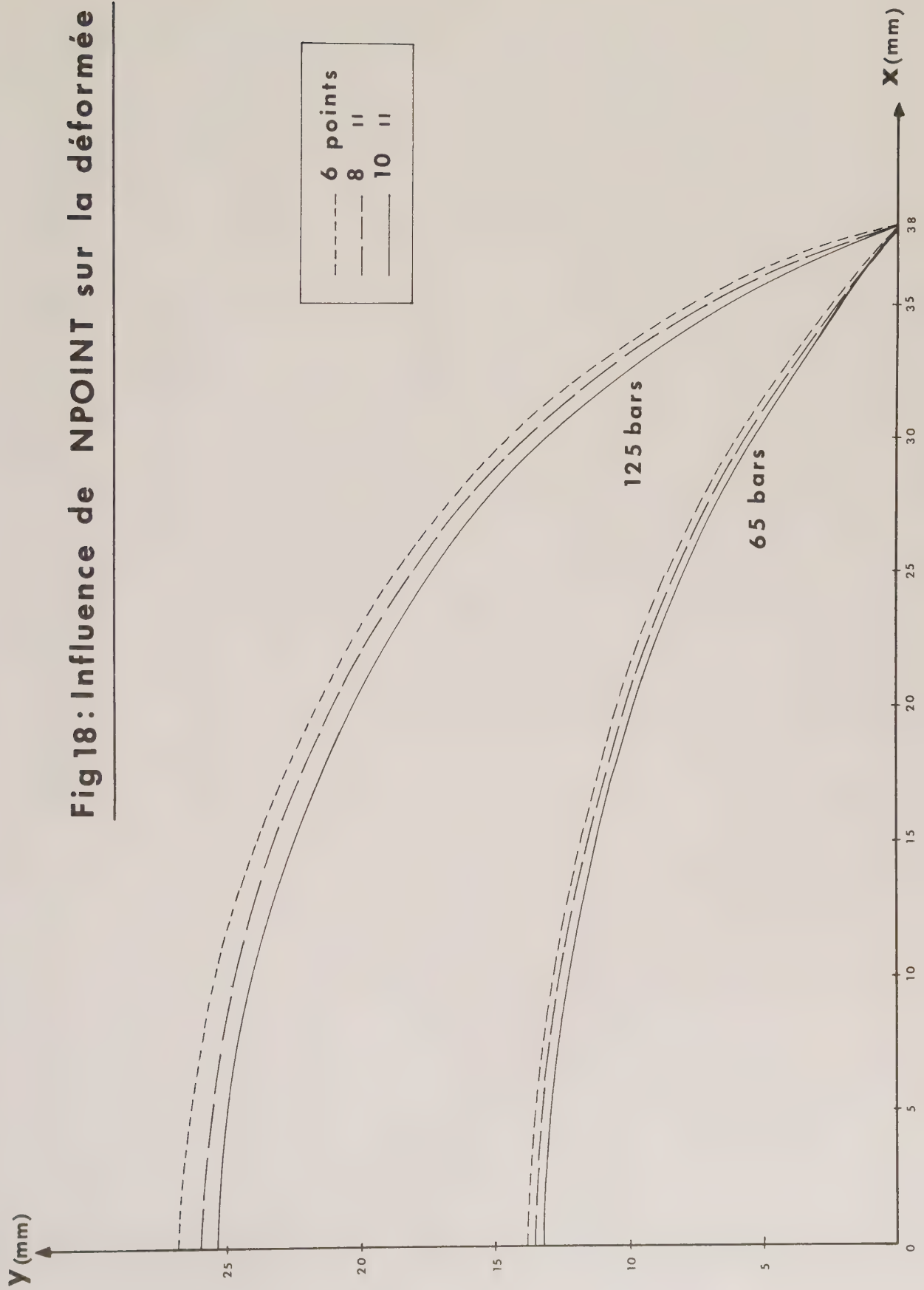
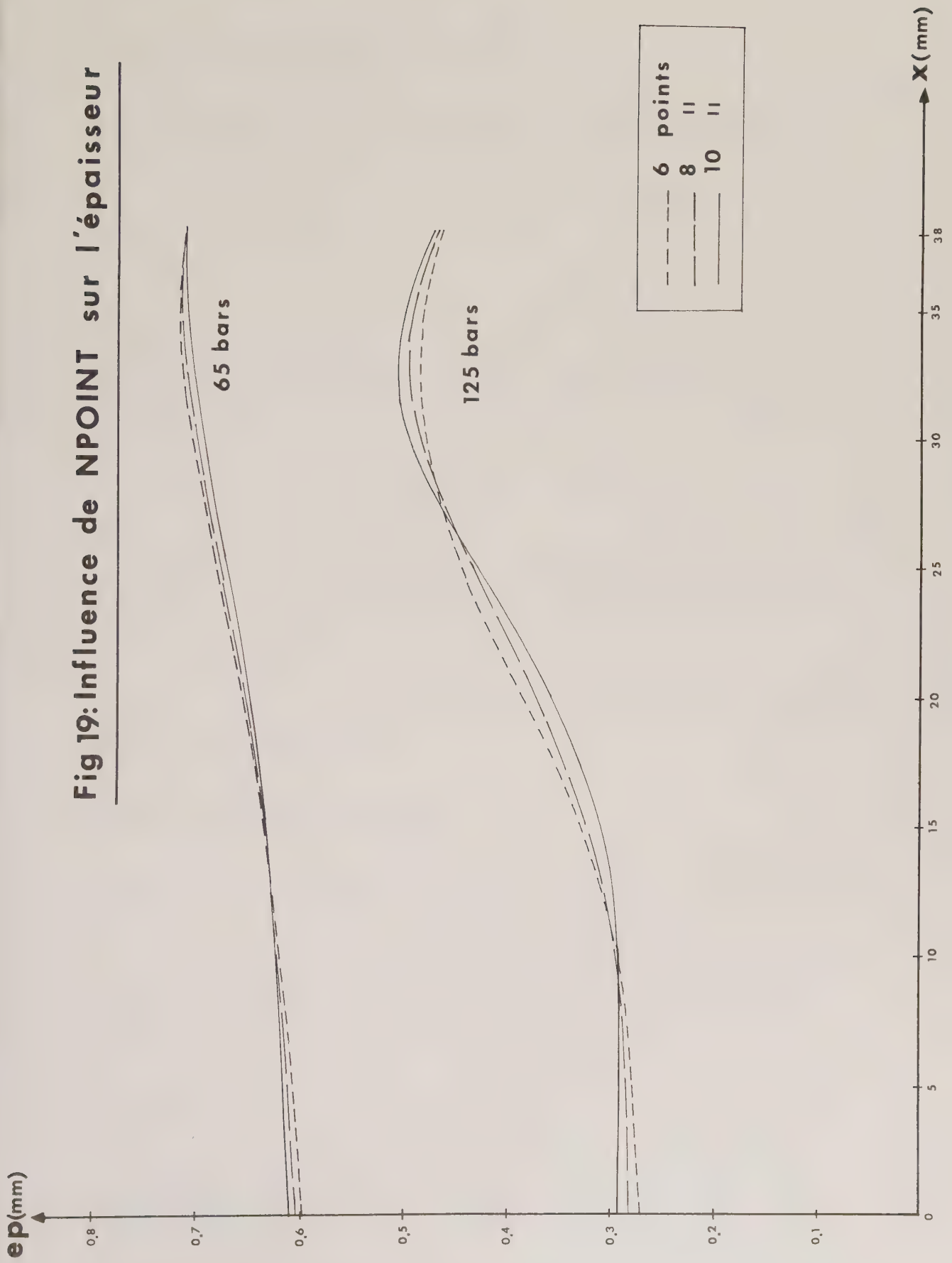




Fig 19: Influence de NPOINT sur l'épaisseur





### Influence de l'incrément de pression :

L'incrément de pression  $\delta P_j$  doit être déterminé avec soin car la bonne résolution du problème lui est liée.

En effet, un  $\delta P_j$  trop grand conduit à des résultats erronés, un  $\delta P_j$  trop petit à des calculs trop longs.

En fait, c'est l'accroissement de déformation équivalente  $\overline{\delta \varepsilon_{i,j}}$  qui est important, car pour un même  $\delta P_j$ , nous obtiendrons au début de la déformation des accroissements de déformation acceptables et en fin de déformation des  $\overline{\delta \varepsilon_{i,j}}$  beaucoup trop grands. Nous avons introduit un test sur  $\overline{\delta \varepsilon_{i,j}}$ , à savoir :

$$\overline{\delta \varepsilon_{i,j}} = \overline{\varepsilon_{i,j}} - \overline{\varepsilon_{i,j-1}} < \lambda .$$

On emploie alors une méthode de dichotomie. Si cette inégalité n'est pas vérifiée, on impose un accroissement de pression  $\frac{\delta P_j}{2}$  au lieu de  $\delta P_j$ , et on recommence tous les calculs relatifs à l'étape j.

Le problème se pose de donner une valeur à  $\lambda$ . Après plusieurs tentatives, nous avons constaté qu'un  $\lambda$  de l'ordre de  $10^{-1}$  répondait parfaitement à nos exigences.

### Influence de la pression initiale :

La hauteur de la déformée initiale dépend directement de la pression initiale  $PR_0$  (voir formule (32)).

Logiquement, pour se rapprocher au maximum des conditions expérimentales, il faut partir d'une déformée aussi plate que possible. Cependant, nous avons constaté que si on impose une pression trop petite (de l'ordre de 0,5 bar), la courbe initiale obtenue présente des rayons de courbure très grands, incompatibles avec le bon déroulement des calculs. Les pressions minimales que l'on peut imposer au départ correspondent aux pressions (variables suivant le matériau) à partir desquelles, expérimentalement, on commence à "voir" une déformation du flan.



Si on change la pression initiale, on constate une légère variation de la hauteur de la déformée au cours des étapes, et surtout une variation importante de l'épaisseur de la coque. Pour une pression initiale  $PR_0$  élevée (égale à 15 bars, par exemple), l'épaisseur calculée est de beaucoup supérieure à celle mesurée. Dans la suite des calculs, nous avons donc adopté les pressions initiales minimales de 3 bars pour l'aluminium et 5 bars pour le laiton.

#### Influence de l'exposant n de la loi d'écrouissage :

L'augmentation de n provoque une très légère diminution de la hauteur de la coque et une importante augmentation de l'épaisseur. Expérimentalement, il est difficile de déterminer n avec précision (entre 0,45 et 0,55). La valeur de 0,48 nous a donné les meilleurs résultats comparativement aux essais.

#### Influence de la régression :

La régression polynomiale de degré 6 nous a donné des résultats acceptables, mais c'est le polynôme :

$$y = (ax^2 + b) (R_0^2 - x^2)$$

qui nous a donné les déformées les plus proches de celles obtenues expérimentalement (voir fig. 32 à 34).

#### I.4.3. Résultats :

Les courbes obtenues par procédé numérique et concernant la déformée, l'épaisseur et les contraintes sont données à la fin du chapitre II où elles sont comparées aux courbes expérimentales.



## CHAPITRE II

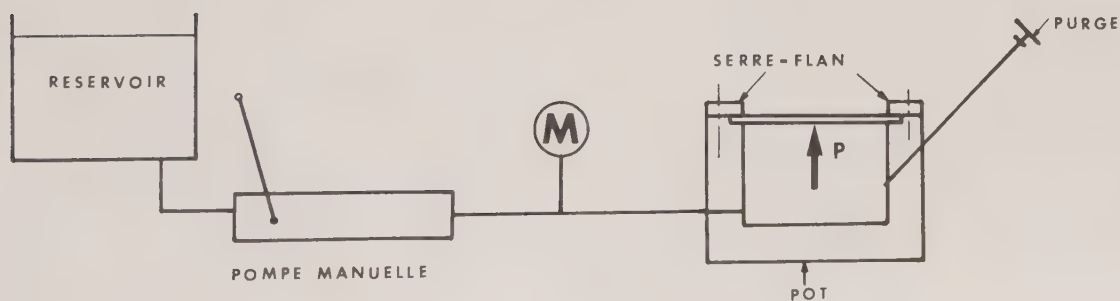
### - Résultats expérimentaux du bulging à froid -

#### II.1. Appareillage expérimental

L'appareillage expérimental que nous avons utilisé dans le cas du bulging à froid est très simple (fig. 20). Il se compose :

- d'une pompe à main, à piston axial,
- d'un manomètre d'une capacité de mesure de 300 bars,
- d'un pôt cylindrique portant à sa partie supérieure un anneau jouant le rôle de serre-flan. Le serrage est assuré par 8 vis ou par l'intermédiaire de brides.

Fig. 20 : schéma du dispositif expérimental



Pour les essais effectués sur l'aluminium, le serrage par vis n'a pas posé de problème. Par contre, dans le cas du laiton, il est beaucoup plus difficile d'assurer un encastrement même après molletage



des surfaces assurant le blocage. On doit renforcer l'action des vis par 8 brides assurant un serrage d'environ 10 tonnes-force. Tout glissement du flan est ainsi supprimé, la déformation est bien une expansion pure, sans rétreint, conformément aux hypothèses de calcul.

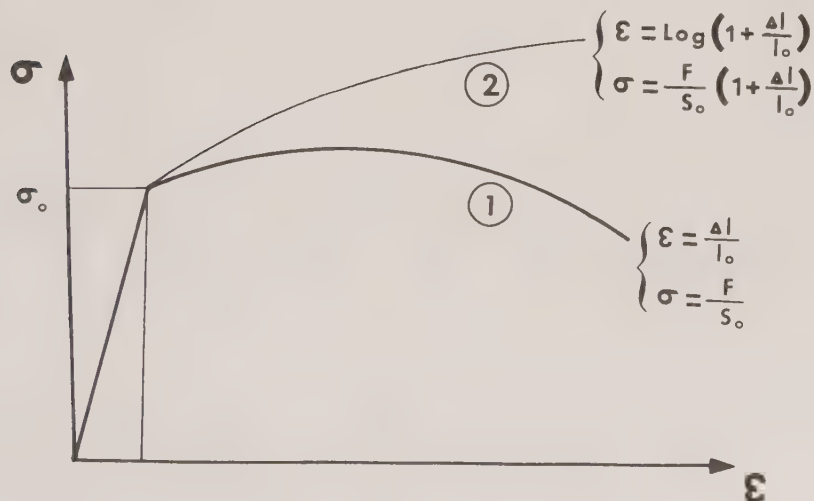
## II.2. Matériaux utilisés

### II.2.1. Préliminaires :

Nous avons vu que, pour calculer numériquement les caractéristiques géométriques de la pièce obtenue par bulging, il était nécessaire de connaître la limite élastique  $\sigma_0$ , le module d'Young  $E$  et l'exposant  $n$  de la loi d'écrouissage du matériau utilisé. Pour cela, nous avons effectué des essais de traction pour déterminer la courbe effort-déformation. Nous avons utilisé une machine de traction Instron à déplacement imposé. L'utilisation d'un extensomètre nous a permis de mesurer le module d'Young.

La fig. 21 montre la courbe de traction (1), donnée par la machine et la courbe de traction rationnelle (2) déduite de (1) qui permet de calculer  $n$ . [25] .

Fig. 21 : courbe de traction d'un matériau élasto-plastique  
écrouissable



Pour les deux matériaux envisagés, nous avons effectué un essai de relaxation au cours de l'essai de traction ; on maintient la déformation  $\epsilon$  constante et on mesure la décroissance de la contrainte  $\sigma$  au cours du temps : la contrainte  $\sigma$  ne diminue pratiquement pas



(1 % environ), il n'y a pas de relaxation, donc pas de fluage |26| .

L'hypothèse de base des calculs selon laquelle la déformation de la coque suit les lois de l'élastoplasticité est donc bien vérifiée.

### II.2.2. L'aluminium

Les essais ont d'abord été effectués sur des éprouvettes d'aluminium dit "commercial", soit sur le matériau brut de livraison, soit après un recuit de 2 h à 215° C |27| .

Les deux cas conduisent à des résultats identiques.

Enfin, nous avons testé l'A5 (99,5 % d'aluminium) très employé en emboutissage. Le pourcentage d'allongement de l'A5 à l'état recuit est nettement meilleur que celui de l'aluminium commercial (fig. 22).

### II.2.3. Le laiton

Même avec A5 recuit, nous ne pouvons obtenir de "bulles" très élevées. Nous avons cherché un matériau susceptible de mieux convenir au bulging |28| .

Le laiton UZ 33 a une capacité de déformation à froid particulièrement élevée qui le désigne pour les emboutissages profonds et difficiles. La ductilité maximale des laitons est atteinte pour 33 % de zinc cependant que les autres caractéristiques mécaniques restent élevées |29| .

Les recuits à haute température (700, 750°C) donnent une ductilité très élevée, mais les pièces embouties présentent alors un phénomène de peau d'orange. Nous avons adopté une température de recuit de 500°C qui préserve l'aspect lisse de la pièce tout en permettant des déformations importantes |30| .

Les essais de traction nous ont montré qu'il n'y avait prati-



quement aucune différence, au point de vue caractéristiques mécaniques, entre des recuits à 500°C, de 30 mn, 1 heure et 3 heures ; seule l'apparence de l'éprouvette change : un recuit de 30 mn conserve à peu près l'aspect brillant du matériau, une durée plus grande provoque un dézingage important. Par la suite, nous avons donc travaillé avec des flans ayant subi un recuit de 30 mn à 500°C.

Les résultats des essais de traction sont donnés fig. 22.

Pour une bonne visualisation de la déformation par méthode optique (§II.3.4.), nous avons dû sabler les flans. Cela diminue notablement le pourcentage d'allongement, mais il n'y a plus de reflets parasites.

Fig. 22 : résultats des essais de traction

| type et état du métal                                          | limite<br>élastique<br>kgf/mm <sup>2</sup> | limite à<br>la rupture<br>kgf/mm <sup>2</sup> | module d'<br>Young<br>kgf/mm <sup>2</sup> | allonge-<br>ment % |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------|
| aluminium commercial (brut de livraison ou recuit 1 h à 215°C) | (très difficile à déterminer)              | 9                                             | 6750                                      | 14                 |
| A 5 (brut de livraison)                                        | 9                                          | 11                                            | 6700                                      | 15                 |
| A 5 recuit 1 h à 215°C                                         | 4                                          | 8                                             | 6700                                      | 26                 |
| UZ 33 recuit 1 h à 500°C                                       | 11,5                                       | 39                                            | 9250                                      | 70                 |
| UZ 33 recuit puis sablé                                        | 10,5                                       | 39                                            | 9250                                      | 53                 |

### II.3. Résultats expérimentaux :

#### II.3.1. Mesure des déformations par cercles concentriques :

Il existe plusieurs procédés de mesure des déformations. Le plus connu est la méthode des réseaux de cercles, qui consiste à imprimer un réseau de cercles (disjoints, tangents, ou sécants) sur la surface de la tôle [4] [31]. Après déformation, chaque cercle est transformé en une ellipse (fig. 23) et il est facile de calculer les déformations principales :

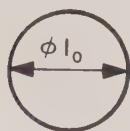


$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \text{Log} \frac{l_1}{l_0} \\ \varepsilon_2 = \text{Log} \frac{l_2}{l_0} \\ \varepsilon_3 = \text{Log} \frac{e}{e_0} \end{array} \right. \quad (34)$$

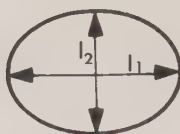
avec  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$

Fig. 23 : transformation des cercles

avant déformation



après déformation



La précision de la méthode est directement liée à la dimension des cercles imprimés. Il est nécessaire d'utiliser des procédés de marquage spéciaux, tel le marquage électrolytique ou le marquage photographique [32] [33] .

Afin de pouvoir graver nous-mêmes les cercles à l'aide d'une point traçante, nous avons choisi une autre méthode qui consiste à tracer deux réseaux orthogonaux constitués par des cercles concentriques à l'encastrement et des diamètres (fig. 24).

La dilatation méridienne est alors donnée par :

$$\varepsilon_m = \text{Log} \frac{ds_i - ds_0}{ds_0}$$

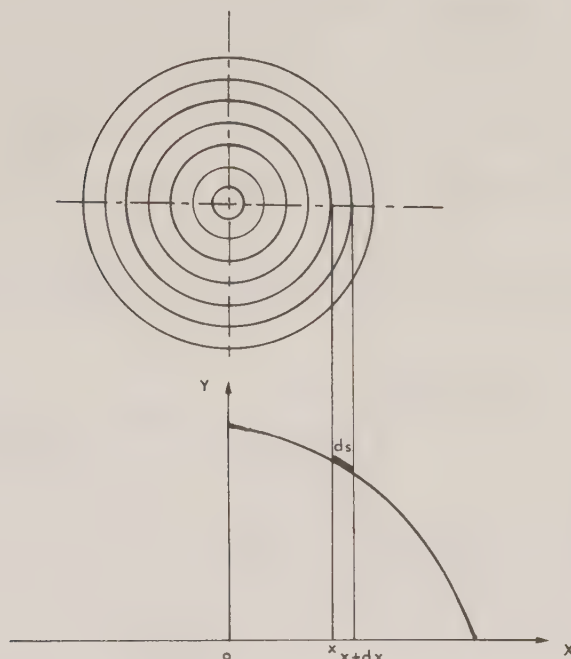
et la dilatation circonférentielle par :

$$\varepsilon_p = \text{Log} \frac{r_i - r_0}{r_i}$$

où i indique le stade de la déformation et 0 désigne l'état initial.



Fig. 24 : mesure des déformations par cercles concentriques



### II.3.2. Mesure de l'épaisseur :

La coque est axisymétrique, il suffit donc de mesurer l'épaisseur sur un méridien. Pour ce faire, nous scions la pièce suivant un plan axial.

La mesure au micromètre à pointes fines n'étant pas répétitive, nous utilisons un projecteur de profil (grossissement 20), ce qui nous permet de connaître à la fois l'épaisseur de la tranche et la déformée (avec une précision de 0,02 mm). Toutes les pièces que nous avons coupées et mesurées présentent une déformée pratiquement sphérique. Cette constatation nous a donné l'idée d'utiliser une méthode de mesure de l'épaisseur encore plus précise.

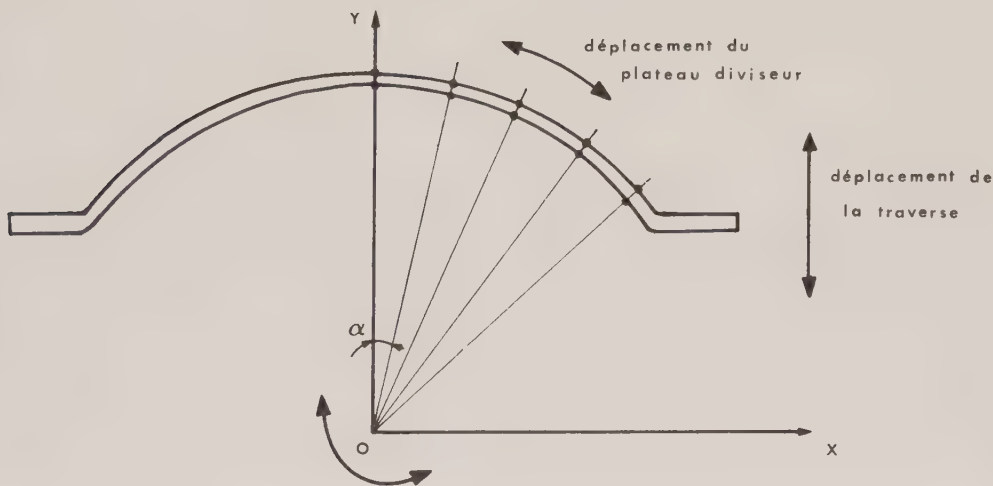
Nous fixons la tranche sur le plateau diviseur d'une machine à pointer munie d'un viseur (fig. 25). Pour chaque position angulaire du plateau, nous mesurons l'épaisseur de la tranche en déplaçant la traverse d'un bord à l'autre.



La précision obtenue est celle de la machine à pointer, c'est-à-dire 0,005 mm.

Le point le plus délicat du réglage consiste à faire coïncider le centre du plateau diviseur avec le centre du méridien, afin de se déplacer perpendiculairement à la tranche. Les imprécisions dues à un mauvais positionnement de la pièce sur le plateau et aux petits écarts de la courbe avec le cercle peuvent nous amener des erreurs supplémentaires de 0,003 mm.

Fig. 25 : mesure de l'épaisseur sur machine à pointer



### II.3.3. Utilisation des jauges de contraintes

#### \* Justification de la méthode :

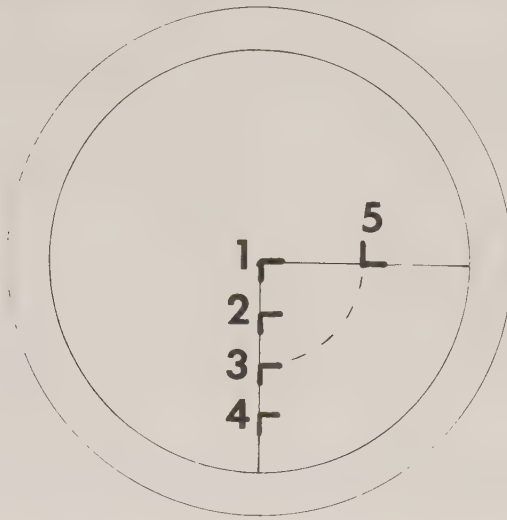
Nous sommes en présence d'un problème statiquement déterminé, c'est-à-dire qu'à chaque instant, pour une déformée et un chargement donnés, les contraintes sont indépendantes de la loi d'écoulement du matériau. Nous pouvons donc faire les mesures des déformations dans le domaine élastique, ce qui justifie l'emploi des jauges de contraintes [34].

#### \* Position et nature des jauges :

Nous avons placé cinq jauges de contraintes à  $90^\circ$  suivant les axes principaux, dont 4 réparties sur un méridien et une sur le méridien orthogonal pour vérifier la sphéricité (fig. 26). Chaque jauge mesure les déformations suivant le méridien  $\epsilon_m$  et suivant le parallèle  $\epsilon_p$ . Les relevés sont effectués par un pont d'extensométrie.



Fig. 26 : emplacements des jauges de contraintes



\* Mode opératoire :

Nous déformons un flan, à froid, jusqu'à l'obtention d'une "bulle" nécessitant une certaine pression  $P$ . Nous déchargeons la pièce (suppression de la pression). Nous collons les jauges de contraintes aux emplacements définis ci-dessus. Nous soumettons la pièce à une nouvelle pression légèrement inférieure à  $P$  de façon à rester dans le domaine élastique. Nous mesurons les déformations  $\epsilon_m$  et  $\epsilon_p$  de la pièce ainsi chargée.

\* Résultats obtenus :

Les résultats expérimentaux montrent que  $\epsilon_m$  décroît toujours lorsqu'on va du centre vers la périphérie ; de même que  $\bar{\epsilon}$ , alors que  $\epsilon_p$  présente, à partir d'une certaine hauteur de coque, un léger maximum pour la jauge 3, ce que confirment d'ailleurs les calculs.

D'autre part, on constate que  $\epsilon_m$  est toujours inférieur à  $\epsilon_p$  ; BRANDON [2] avait déjà signalé ce résultat en fluage, qui s'oppose aux travaux d'auteurs qui nous ont précédés.

Enfin les jauges 3 et 5 placées sur le même parallèle nous donnent les mêmes déformations  $\epsilon_m$ , tandis que  $\epsilon_p$  (3) est toujours supérieure à  $\epsilon_p$  (5), ce qui prouve que le matériau n'a pas un comportement parfaitement isotrope, contrairement aux hypothèses de calcul.

II.3.4. Méthode optique :

Nous avons travaillé en collaboration avec le laboratoire d'optique qui nous a aimablement fourni la méthode, le matériel, et une aide



précieuse pour mener à bien nos manipulations.

Afin de pouvoir produire des pièces d'une hauteur déterminée de façon répétitive, il est important de savoir mesurer la hauteur de la "bulle" en cours de déformation. Aucune méthode de type mécanique ne nous ayant paru satisfaisante, nous avons choisi de visualiser la déformation par une méthode optique de franges projetées [35], [36].

D'une façon générale, les méthodes optiques permettent un contrôle non destructif de la déformation. Nous utilisons une méthode de mesure à distance, sans contact avec le système en mouvement, et insensible à la température, la méthode de double projection de franges qui se distingue principalement des autres par :

- son aspect global, permettant d'avoir la déformation de l'ensemble de la pièce étudiée.
- son application en temps réel : les lignes de niveaux apparaissent sur la surface et évoluent avec la déformation sans nécessiter de traitement.
- sa facilité de mise en oeuvre.
- son domaine de sensibilité : par le jeu de certains paramètres, on peut mettre en évidence des amplitudes allant de quelques centaines de microns à quelques dizaines de centimètres.

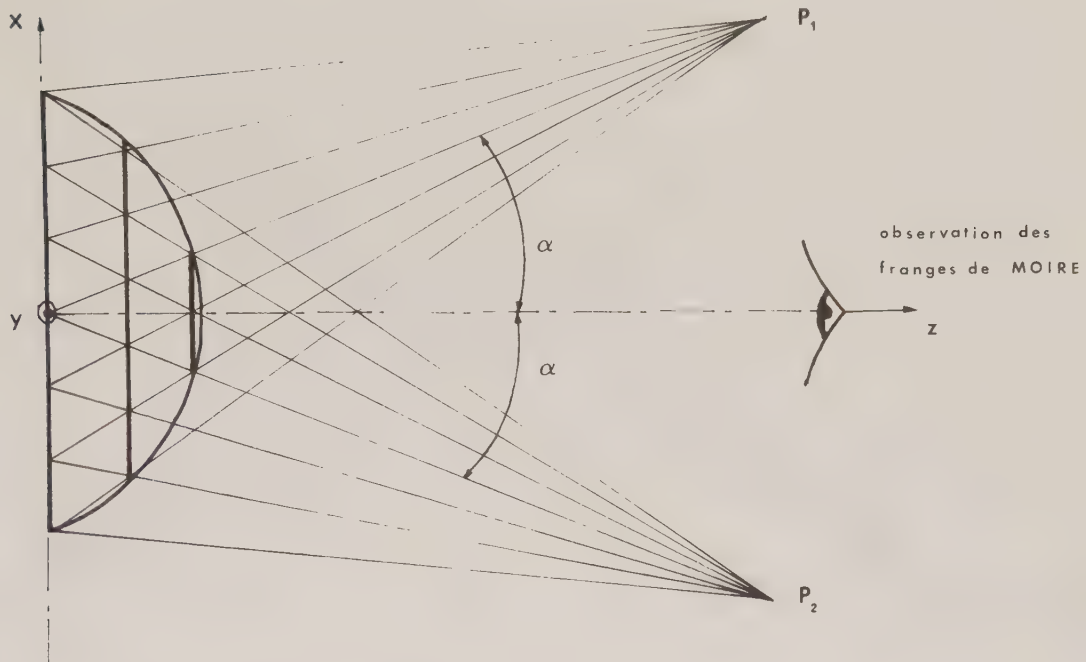
### Principe et étude théorique :

Les lignes de niveau observées sont dues au phénomène de Moiré entre deux éclairements périodiques [37]. La figure de Moiré est liée directement au relief de la pièce (fig. 27).

Chaque projecteur  $P_1$ ,  $P_2$  dont l'axe fait un angle  $\alpha$  avec la normale à la surface de référence, projette l'image d'un réseau de pas  $p_0$ . La contribution des deux éclairements donne naissance à un système de franges localisées sur la surface et qui matérialisent les points d'égale amplitude par rapport à une surface de référence. On a ainsi accès à la topographie de la pièce. Si le relief évolue, la "carte de niveau" évolue aussi.



Fig. 27 : observation des franges de Moiré



On pose quelques hypothèses :

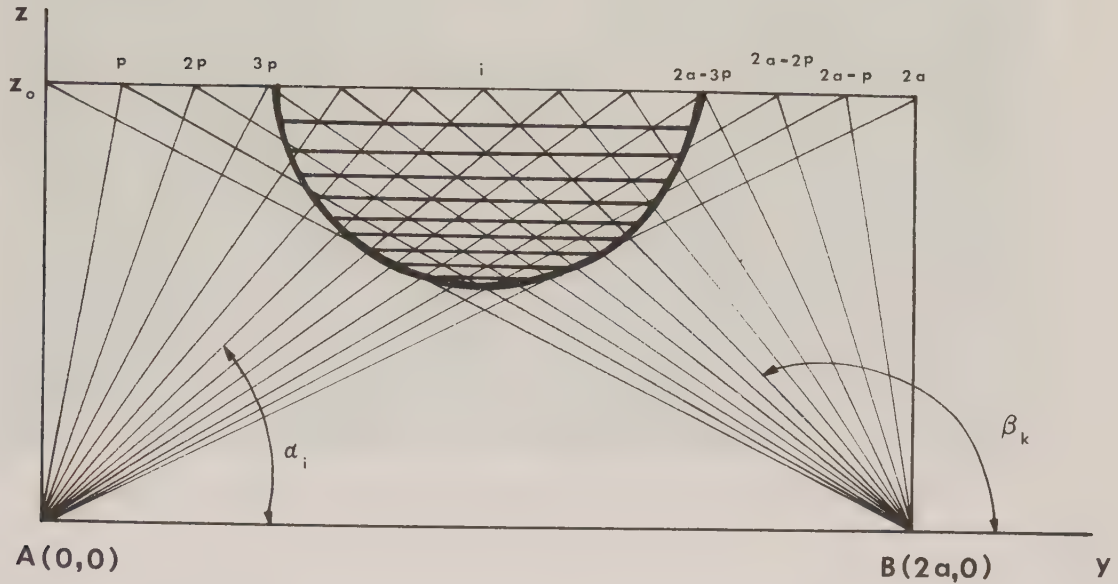
- la surface présente une dispersion uniforme de la lumière qu'elle reçoit.
- les deux directions de projection de franges et la normale à la surface de référence sont dans un même plan.
- afin d'observer des niveaux parallèles à la surface de référence, la direction d'observation est perpendiculaire à cette surface.

La formation des images des réseaux sur le matériau à étudier est faite par l'intermédiaire de projecteurs de diapositives. On suppose que l'intersection du faisceau de projection et d'un plan faisant un angle  $\alpha$  avec la direction de projection, donne naissance à un réseau de pas constant. Dans le cas de la projection d'un réseau de pas constant  $p_0$ , l'approximation est valable pour  $\alpha$  petit ( $< 20^\circ$ ).

La fig. 28 montre le schéma de principe de la projection de deux répartitions périodiques sur un plan.



Fig. 28 : projection de deux réseaux de franges sur un plan



Les deux projections issues de A (0,0) et B (2 a,0) donnent naissance à une répartition d'éclairement périodique de pas p sur le plan de côte  $z_0$ , pris comme plan de référence. Les lieux des points d'égale amplitude sont matérialisés par les franges de Moiré d'ordre  $m = i - k$ .

$$\text{Ces points ont pour côte : } z = \frac{2 a z_0}{2 a + m p} . \quad (35)$$

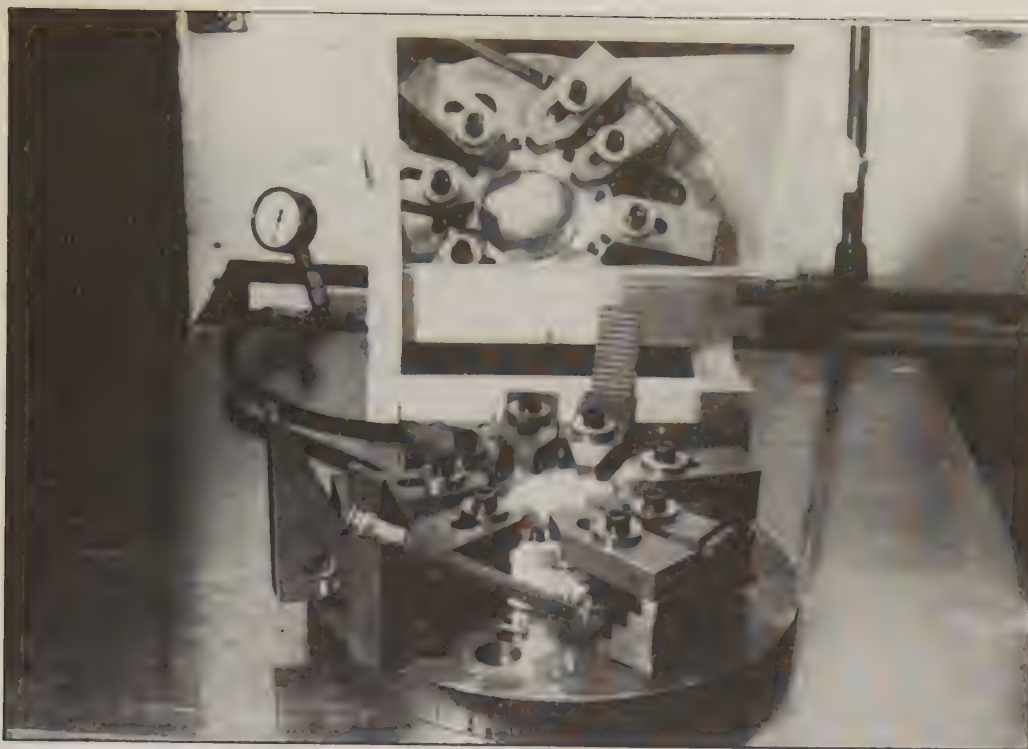
Les surfaces de côte z sont des plans parallèles au plan contenant AB et au plan de référence de côte  $z_0$ . Ce sont les lieux d'égale amplitude. On peut déduire la distance qui sépare deux plans successifs d'ordre m et m + 1 en dérivant cette quantité :

$$\text{d'où : } \Delta z = \frac{-2 a z_0 p}{(2 a + m p)^2} \quad (36)$$

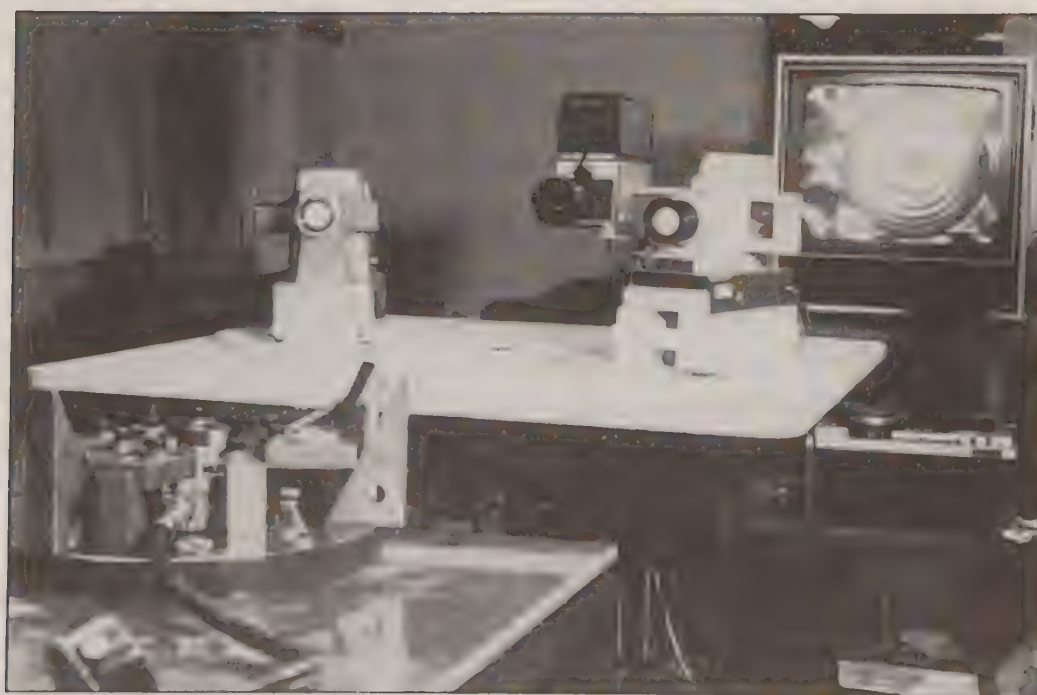
$\Delta z$  varie en fonction de m, ce qui explique que le pas des franges projetées diminue à mesure qu'on se rapproche du plan de projection contenant AB.

Manipulation :





**Appareillage expérimental du BULGING à froid  
avec miroir de réflexion à 45°**

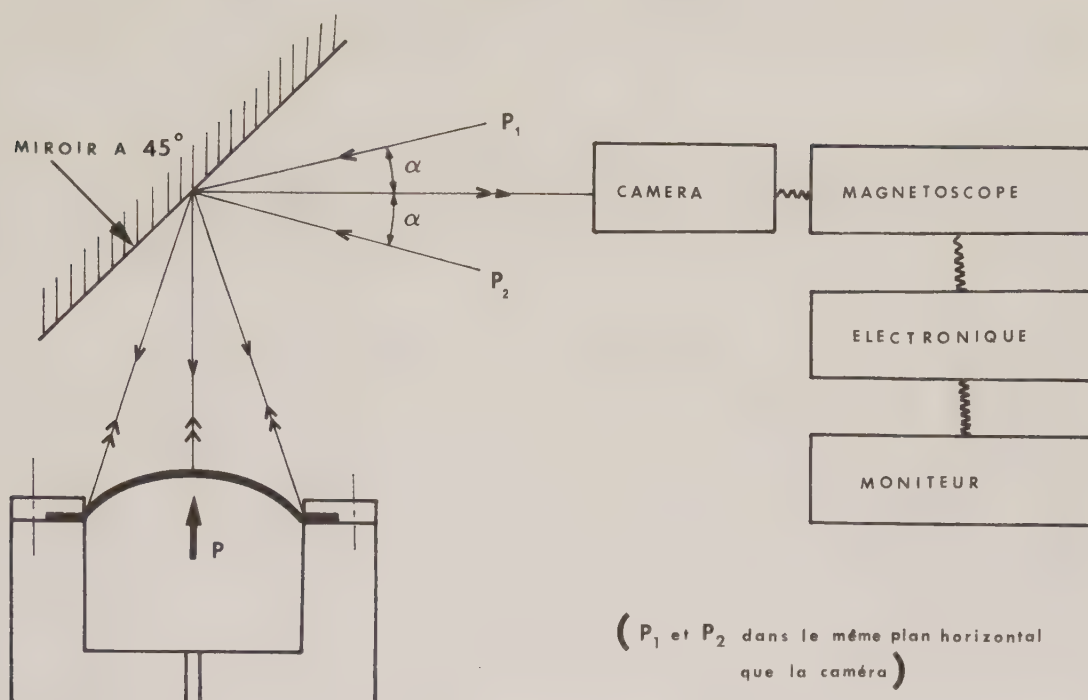


**Vue d'ensemble du dispositif de visualisation :**

- les deux projecteurs de diapositives
- la caméra
- le magnétoscope



Fig. 29 : schéma du montage



Pour la projection, on utilise deux projecteurs de diapositives de même focale  $f = 100$  mm. Les réseaux projetés ont été réalisés par photographie de trames sur plaque de verre. La fréquence utilisée est de 6 traits par millimètre.

#### Systèmes vidéo d'enregistrement et filtre :

Pour la visualisation, on utilise une chaîne vidéo Sony (caméra AVC 3200 S E + magnétoscope AV 3670 C E + moniteur PVM 200 CE). La caméra est équipée d'un zoom BERTHIOT ( $f = 20$  mm - 100 mm).

Le faible contraste des franges de Moiré dû à l'état de surface et à la présence des franges du primaire, nécessite un traitement en vue d'améliorer le signal pour la visualisation. Un système électronique de détection et de filtrage a été mis au point, on peut l'utiliser de plusieurs façons :

- à l'enregistrement, le signal vidéo issu de la caméra passe à travers un filtre haute-fréquence et est adressé ensuite au magnétoscope qui met en mémoire le signal amélioré.



- si la qualité du signal n'est pas suffisante, on peut passer une seconde fois à travers le filtre placé alors entre le magnétoscope et le moniteur.
- on peut multiplier indéfiniment le traitement en disposant d'un deuxième magnétoscope.

Pour la commodité du montage, on travaille avec un miroir placé à 45° au-dessus de l'échantillon, ce qui permet de disposer l'ensemble pôt-projecteur-caméra sur un plan horizontal.

La surface du matériau utilisé (UZ 33) est brillante. Les variations d'éclairement d'un point à l'autre de la pièce sont assez importantes et difficiles à maîtriser par suite de la variation de la forme de la pièce au cours du temps. Il était indispensable de supprimer les réflexions les plus importantes en diminuant le pouvoir réflecteur de la surface, ce qui permet d'obtenir un éclairement plus uniforme. Le sablage répond au problème : la microstructure aléatoire de la surface provoquée par les grains de silice conduit à une dispersion plus uniforme de la lumière incidente.

Pour obtenir des courbes de niveau perpendiculaires à la direction d'observation, il faut régler les systèmes de projection de façon à éliminer toute frange dans le plan de la surface initiale, c'est-à-dire en orientant les deux réseaux dans la même direction et en ajustant les angles des projecteurs de par et d'autre de la normale à la surface. Insistons sur le fait que ces trois axes doivent être contenus dans le même plan perpendiculaire au plan de la surface de référence.

La "teinte plate" obtenue, on a sur la surface, un simple réseau de franges rectilignes. On connaît les dimensions de la pièce (diamètre D), le pas  $p_0$  des réseaux projetés, la distance 2 a des deux projecteurs. On compte N franges (traits noirs) sur la pièce, d'où le pas des franges :  $p = \frac{D}{N}$ .

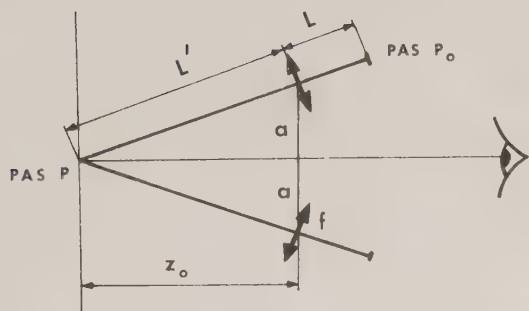
On en déduit le grandissement des projecteurs :

$$G = \frac{p}{p_0} .$$

On va pouvoir calculer  $\alpha$  que l'on ne peut obtenir de façon précise par une mesure directe.



Fig. 30



De la fig. 30, on tire :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1'} = \frac{1}{f}$$

or  $G = \frac{1'}{1} = \frac{f}{1-f}$

d'où :  $\begin{cases} 1 = \frac{f(1+G)}{G} \\ 1' = \frac{1f}{1-f} \end{cases}$

$$\sin \alpha = \frac{a}{1+1'}$$

d'où :  $\alpha = \text{Arcsin} \frac{a}{\frac{f(1+G)}{G} + \frac{1f}{1-f}}$

Résultats obtenus :

Données :  $\begin{cases} f = 100 \text{ mm} \\ a = 250 \text{ mm} \\ p_0 = 0,16 \text{ mm (6 traits / mm)} \\ D = 76 \text{ mm} \\ N = 46 \end{cases}$

On en déduit :

$$\begin{cases} p = 1,65 \text{ mm} \\ G \approx 10 \\ \alpha = 11,9^\circ \\ z_0 = 1183,89 \text{ mm} \end{cases}$$

La pièce soumise à une pression se déforme, et l'apparition de la première frange de Moiré n'a lieu qu'à la limite de sensibilité du système. Vu la symétrie de la déformation, les franges sont des anneaux concentriques qui naissent au centre et s'écartent à mesure que la pression augmente.

Au cours des enregistrements, nous avons pu aller jusqu'à 7 niveaux pour les pièces en laiton (voir fig. 31) et 4 niveaux pour celles en aluminium.



Fig. 31 : enregistrement des franges de Moiré

|            |          |          |          |          |          |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| m          | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        |
| z          | 1179,996 | 1176,128 | 1172,284 | 1168,466 | 1164,673 | 1160,904 | 1157,159 |
| $\Delta z$ | 3,89     | 3,86     | 3,83     | 3,80     | 3,77     | 3,76     | 3,73     |
| $h_m$      | 3,89     | 7,76     | 11,59    | 15,39    | 19,16    | 22,92    | 26,65    |

La différence de niveau moyen :

$$\langle \Delta z \rangle_{\text{moyen}} = 3,81 \text{ mm}$$

est la sensibilité du montage pour ces paramètres. On peut augmenter la sensibilité de la méthode en augmentant  $\alpha$  ou en augmentant la fréquence des franges projetées.

Limite de la méthode : sensibilité et résolution.

Cette méthode de projection de franges appliquée à la visualisation de courbes de niveau peut être discutée suivant deux orientations [38] à savoir :

- la résolution du système électronique,
- la limitation du dispositif optique.

\* Résolution du système électronique :

Avec un système T.V. relativement performant comportant une photocathode de 1 pouce de largeur par exemple, la fréquence de coupure se situe autour de 20 traits/mm. Des expériences ont montré qu'une fréquence de 10 traits/mm était transmise par la chaîne T.V. sans atténuation. Le grandissement  $\gamma_1$ , à la prise de vue par la chaîne vidéo doit être tel que l'image de la pièce toute entière se trouve sur la photocathode. Ainsi, pour une photocathode de 12,5 mm et une pièce de 80 mm de diamètre, le grandissement  $\gamma_1$  est égal à 12,5 / 80. La fréquence limite de la chaîne T.V. fixe donc la fréquence des franges projetées sur l'objet, à savoir  $10 \text{ mm}^{-1} / \gamma_1$  soit  $1,5 \text{ mm}^{-1}$ .



\* dispositif optique :

Le dispositif optique se présente sous la forme de deux projecteurs de diapositives placés symétriquement par rapport à la direction d'observation. Les problèmes liés au dispositif optique passent par la discussion de la formule donnant l'écart entre les différents plans délimitant les courbes de niveau :

$$\Delta z = \frac{-2 a z_o p}{(2 a + m p)^2}$$

La résolution des courbes de niveau définies par les valeurs successives de  $\Delta z$  dépend directement de  $p$ , période des franges projetées. Toute réduction de  $p$  amène un accroissement de la sensibilité.

Ainsi, avec la chaîne T.V. :  $p_{\max} = 1,5 \text{ mm}^{-1}$ .

Un point par ailleurs important est la profondeur de champ de l'objectif de projection. Il faut en effet que le système de franges conserve une netteté à peu près constante dans l'espace objet (largeur de l'objet et amplitude maximum de déformation).

Dans notre cas, la profondeur de champ est de l'ordre de 40 mm, ce qui est compatible avec l'amplitude maximum de déformation sur les petites pièces.

Pour une pièce plus importante, il faudrait placer les systèmes de projection plus loin.

Un autre problème est celui de la diffraction engendrée par le réseau sur la source lumineuse du système de projection. Une petite dispersion se crée, qui limite la netteté des bords des franges projetées. Cet effet est éliminé en remplaçant la lampe du système optique (lumière blanche) par une lampe à vapeur de sodium (lumière quasi monochromatique).

Compte tenu de toutes ces améliorations, on peut atteindre pour les échantillons de petites tailles, une sensibilité  $\Delta z$  de 1,3 mm.

En conclusion :



- la résolution du système électronique fixe la fréquence des franges projetées sur l'échantillon à étudier.
  - l'amplitude de déformation dicte la configuration du système optique.
- A partir de ces deux points de vue, on en déduit la sensibilité maximale obtenue.

Au point de vue mécanique, l'utilisation de cette méthode de mesure optique nous donne la possibilité de connaître, à chaque instant la hauteur de la pièce sans perturber la déformation. Elle nous permet en particulier d'arrêter l'emboutissage à une hauteur déterminée à l'avance (avec une précision de 1,3 mm), afin de pouvoir faire des mesures comparatives.

#### II.4. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

##### II.4.1. Déformée :

Les figures 32 à 34 donnent les déformées obtenues expérimentalement et par le calcul, et le cercle passant par les points extrêmes de la courbe expérimentale pour différentes pièces.

On constate d'abord que, dans tous les cas, le cercle est la courbe la plus proche de la déformée expérimentale, ce qui amène deux remarques :

- 1) il est inutile de calculer le déplacement des N points de la courbe méridienne pour ensuite faire une régression polynomiale. Le calcul de l'ordonnée du sommet suffit et permet de calculer le cercle passant par les points 1 et N, ce qui donne une excellente approximation de la déformée.
- 2) il n'est pas nécessaire d'introduire deux rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$ , puisque la déformée est pratiquement une sphère, ce qui n'était pas le cas du bulging à chaud (cf. Brandon).

Les régressions polynomiales de degré 4 et 6 fournissent des courbes assez proches l'une de l'autre. La régression de degré 4 respecte mieux la courbure de la déformée expérimentale, mais s'éloigne plus de



celle-ci au voisinage du sommet, surtout pour les pièces de hauteur importante. Cependant, les deux donnent des résultats satisfaisants compte tenu de l'influence que peuvent avoir divers paramètres assez mal connus sur les résultats.

#### II.4.2. Épaisseur :

Les figures 35 à 37 montrent les épaisseurs de la tranche obtenues sur ces mêmes pièces.

Pour les "bulles" de hauteur moyenne (A5 : 10 mm, UZ 33 : 14mm), les courbes calculées sont très proches de la courbe mesurée, en particulier avec la régression polynomiale de degré 4.

En ce qui concerne les "bulles" proches de la rupture, la différence entre les épaisseurs mesurées et calculées s'accroît, mais les courbes théoriques restent acceptables lorsqu'elles sont calculées avec la régression de degré 4, sauf au voisinage de l'encastrement où nous savons que les hypothèses de calcul ne sont pas valables .

#### II.4.3. Déformations :

La fig. 38 donne le rapport des déformations  $\epsilon_m/\epsilon_p$  le long d'un méridien, obtenu par le calcul au moyen de la régression polynomiale de degré 4 et expérimentalement, grâce aux jauges de contraintes, sur une coque d'UZ 33 d'épaisseur initiale 0,8 mm et de hauteur 26 mm. La concordance des deux courbes est très bonne.

#### II.4.4. Conclusion :

Résumons l'essentiel des résultats acquis.

Le bulging à froid nous permet d'obtenir des emboutis pratiquement sphériques. L'épaisseur est minimale et les contraintes sont maximales au sommet. La hauteur de la coque n'excède pas 25 % du diamètre utile pour A5, le tiers du diamètre utile pour UZ 33. Au-delà, il y a rupture au sommet du dôme, dans le sens du laminage.

Les résultats théoriques obtenus en utilisant la régression  $y = (R_0^2 - x^2) (a x^2 + b)$  donnent une bonne approximation de la réalité, sauf au voisinage de l'encastrement.



Fig 32: déformée pour A5

recuit ( $_{215^{\circ}\text{C}, 1\text{h}}$ )  
 $e_0 = 0.6\text{ mm}$   
 $P_{\text{max}} = 30\text{ bars}$

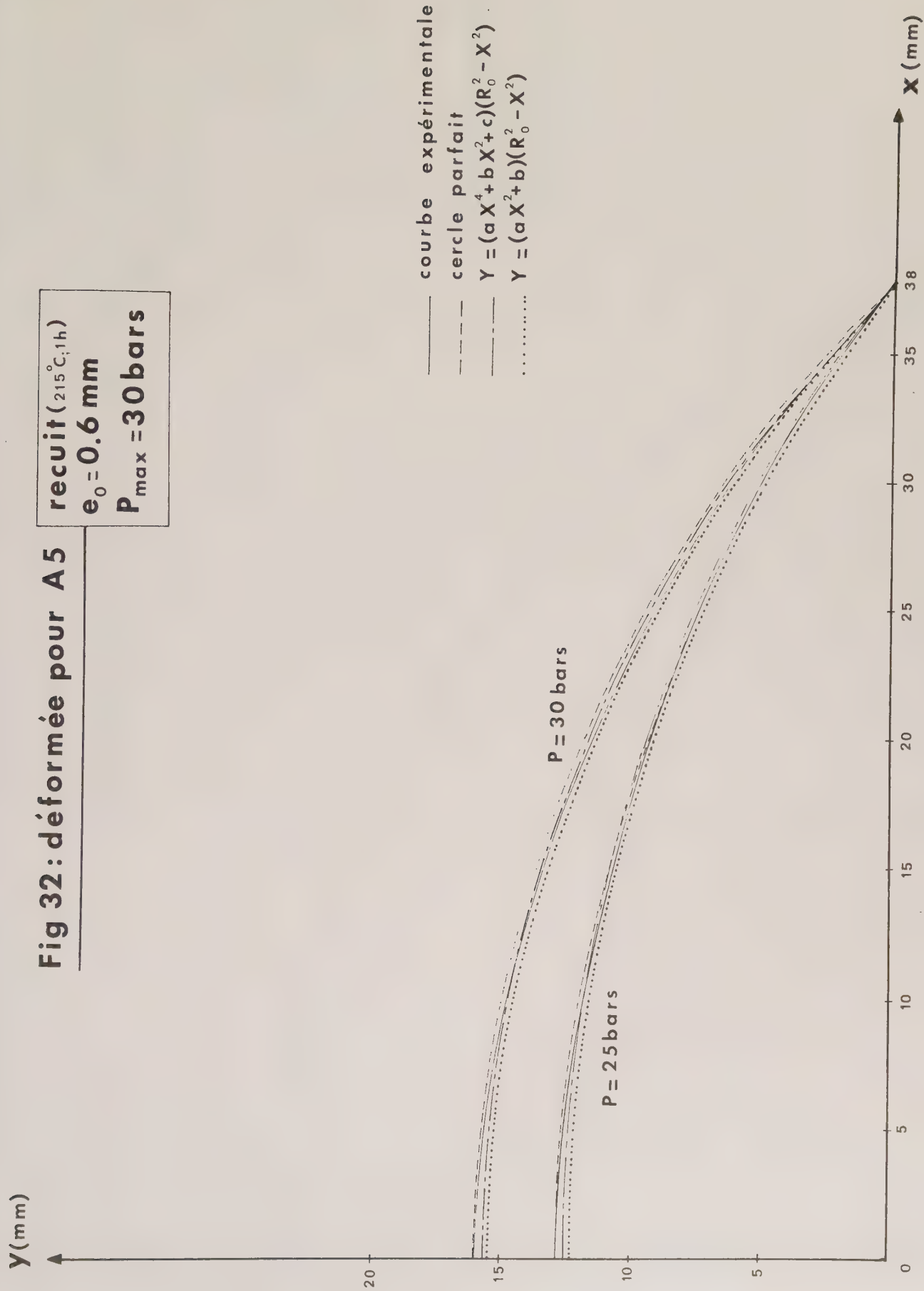




Fig 33: déformée pour UZ 33

recuit ( $500^{\circ}\text{C}$ ; 30 mn)

$e_0 = 0.8\text{ mm}$

$P_{\text{max}} = 135\text{ bars}$

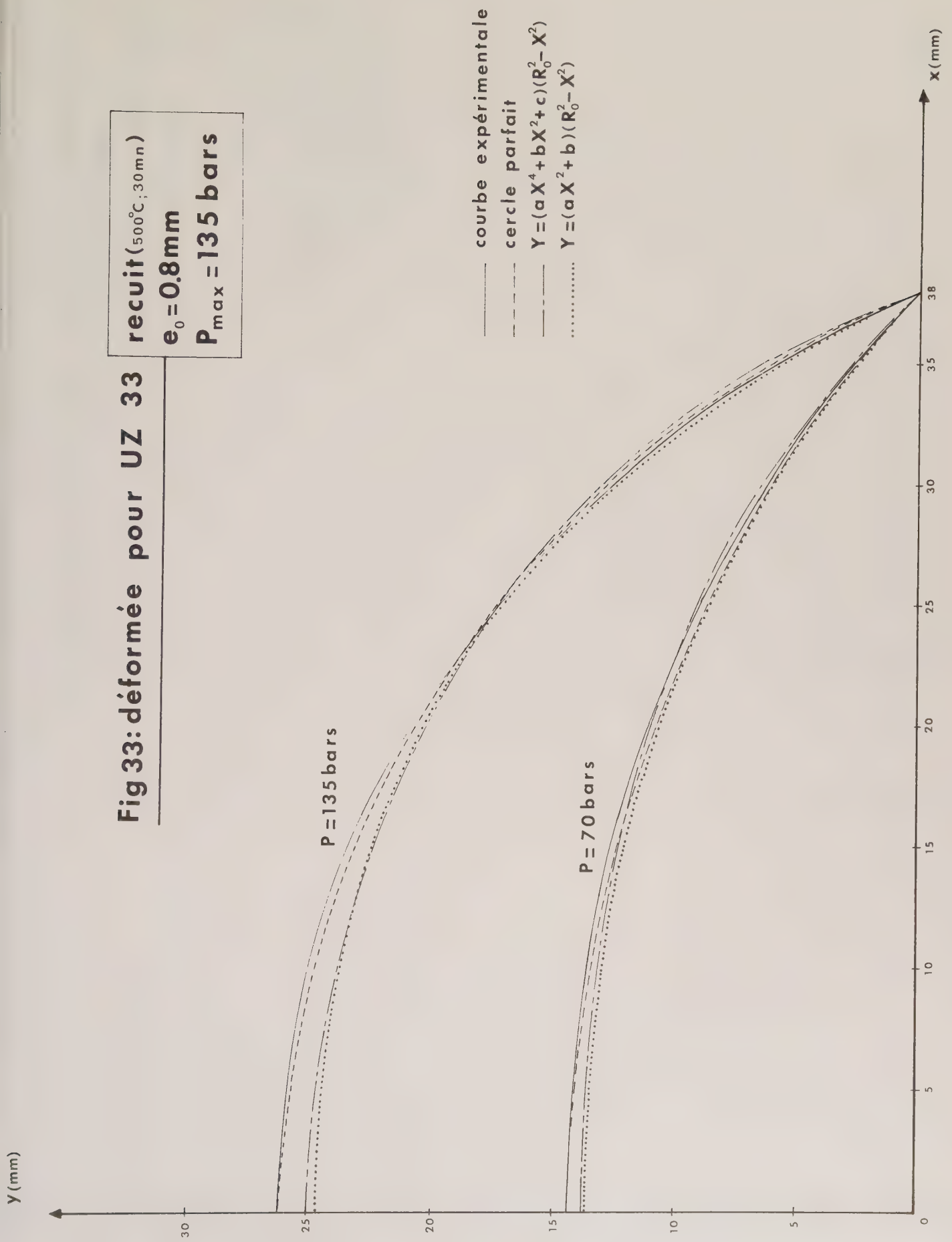




Fig 34: déformée pour UZ 33

recuit ( $500^{\circ}\text{C}$ , 30 mn)  
 $e_0 = 1\text{ mm}$   
 $P_{\text{max}} = 170\text{ bars}$

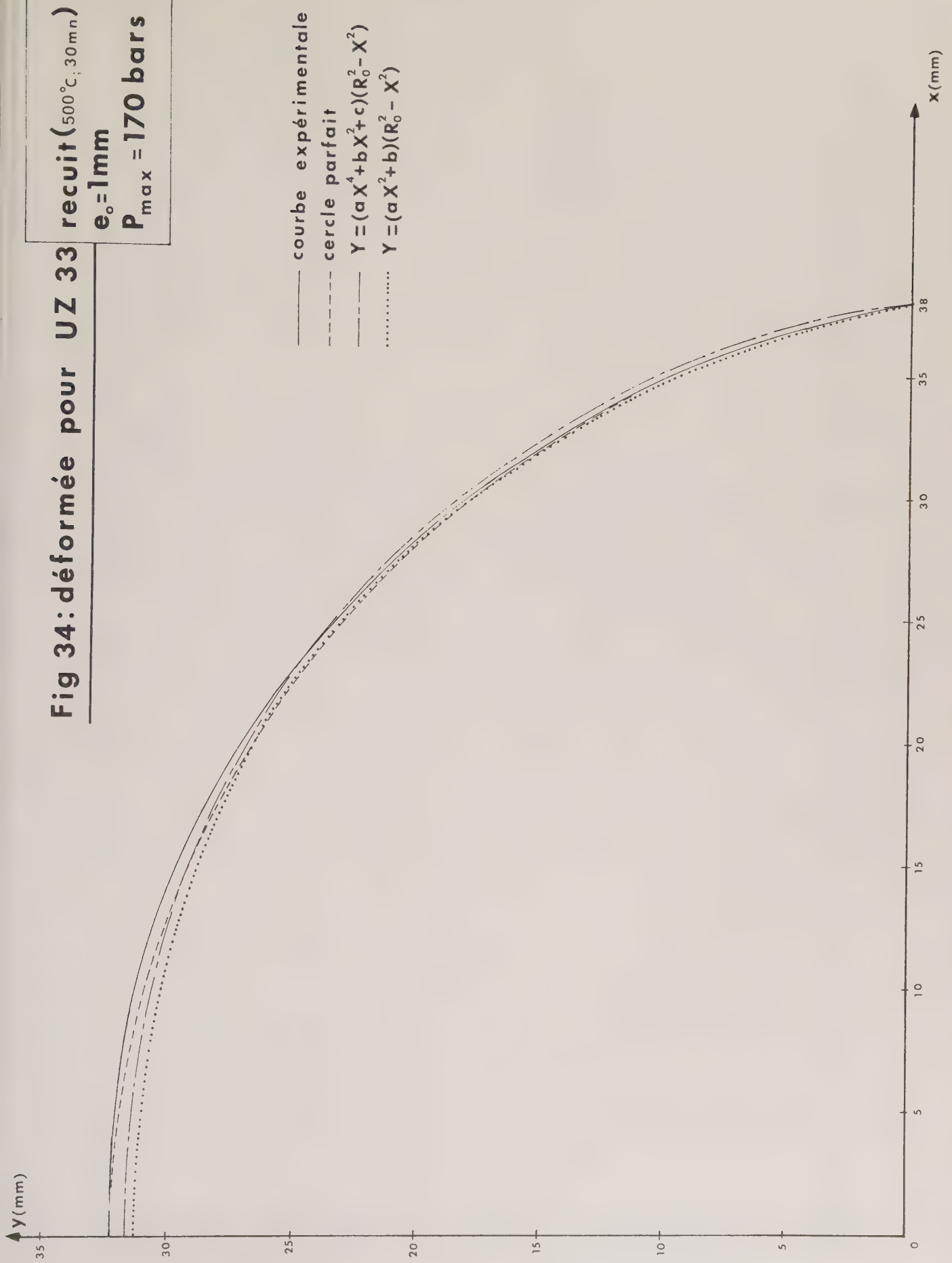




Fig 35: épaisseur pour A5

recuit (215°C; 1h)  
 $e_0 = 0.6 \text{ mm}$   
 $P_{\max} = 30 \text{ bars}$

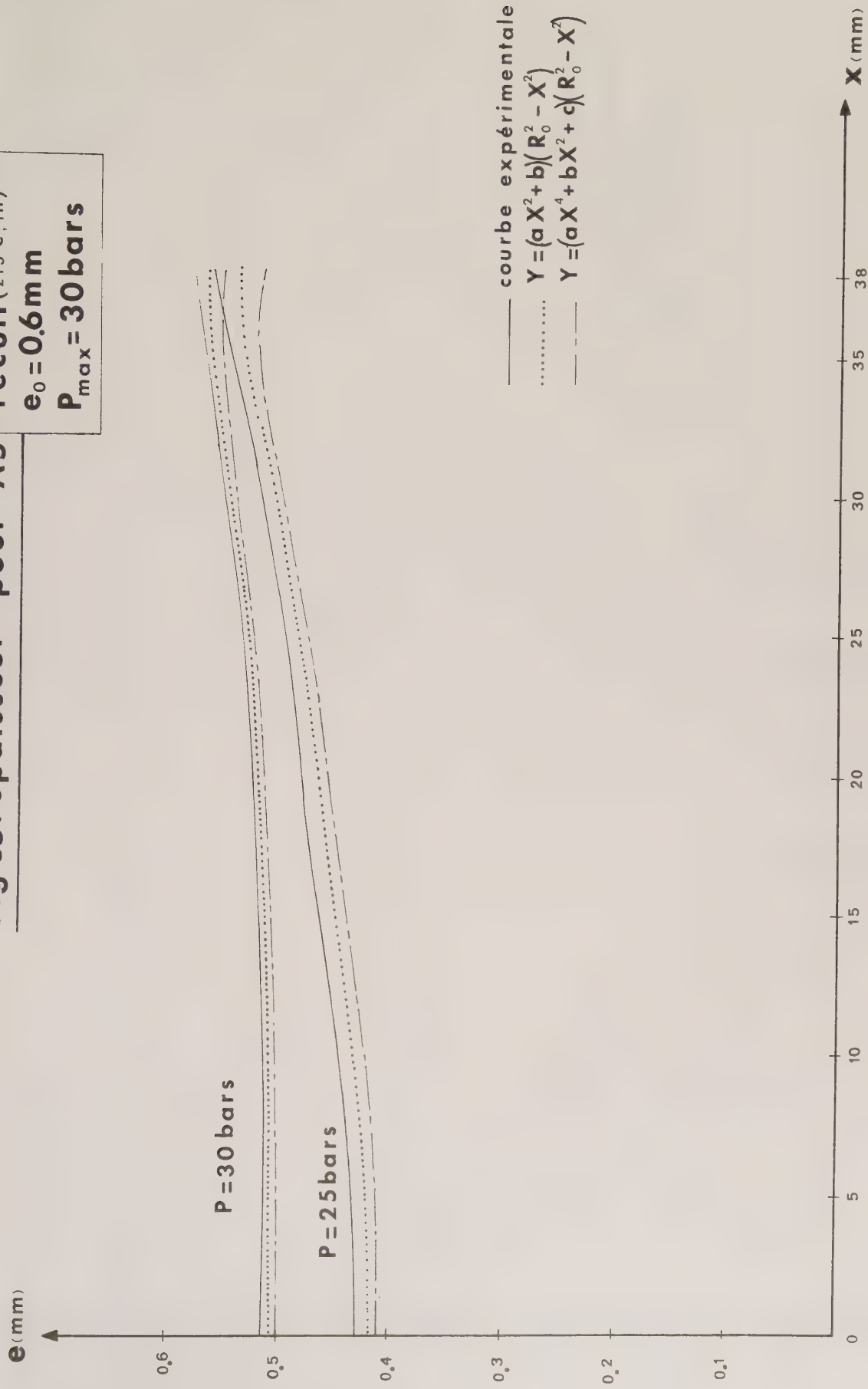
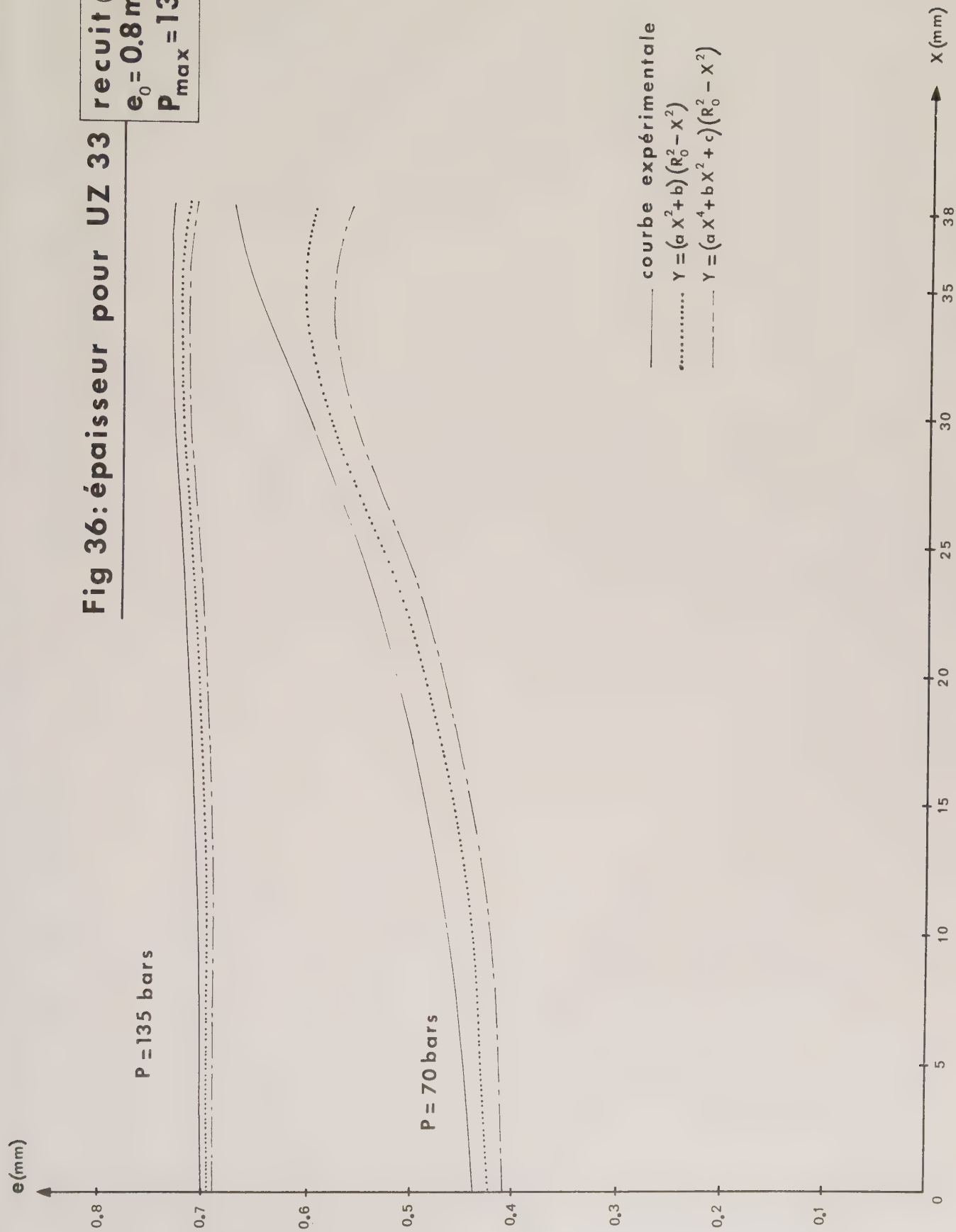




Fig 36: épaisseur pour UZ 33

recuit (500°C; 30 mn)  
 $e_0 = 0.8 \text{ mm}$   
 $P_{\max} = 135 \text{ bars}$





**Fig 37: épaisseur pour UZ33 recuit ( $500^{\circ}\text{C}$ , 30 mn)**

$e_0 = 1\text{ mm}$

$P_{\text{max}} = 170\text{ bars}$

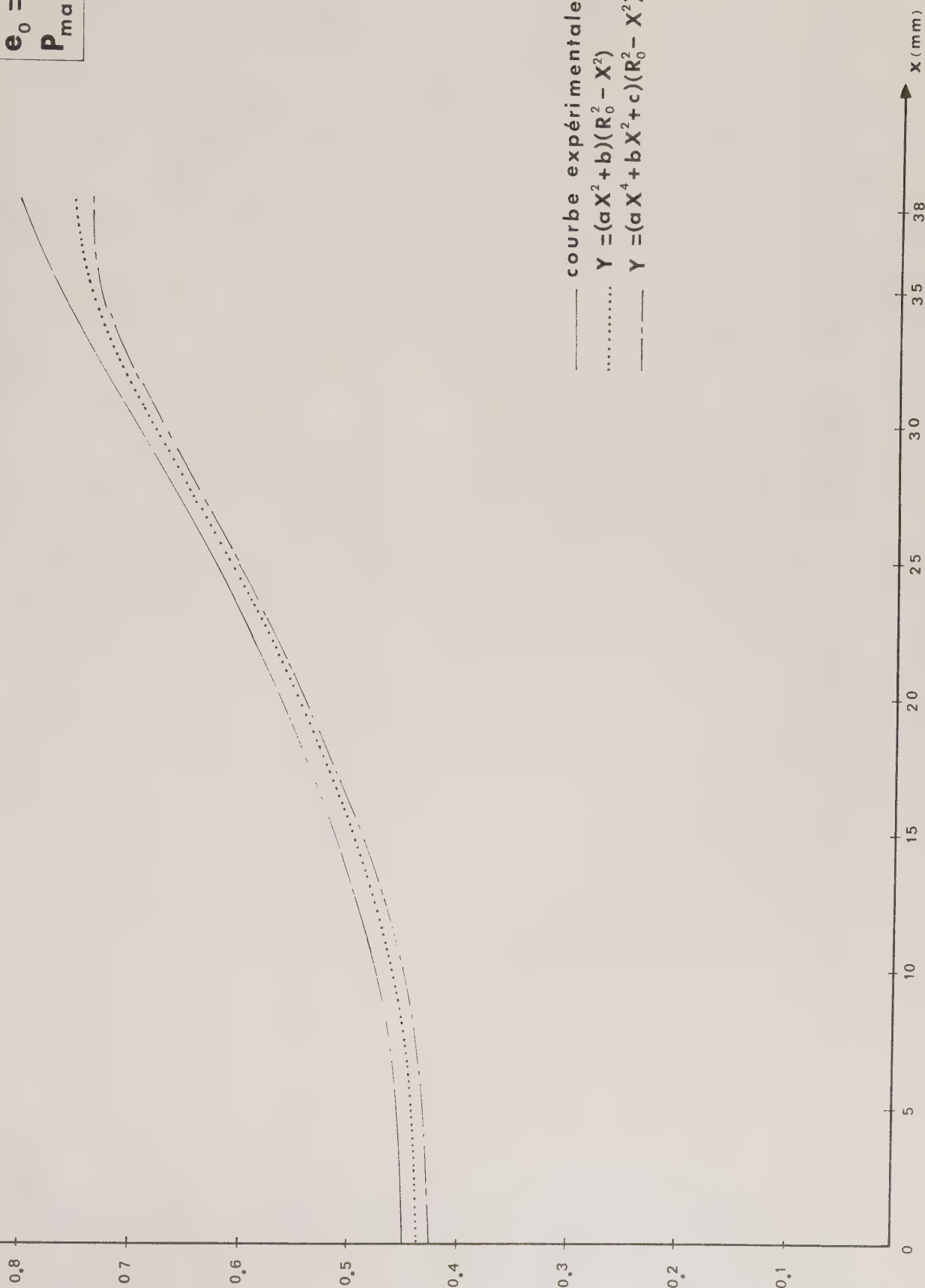
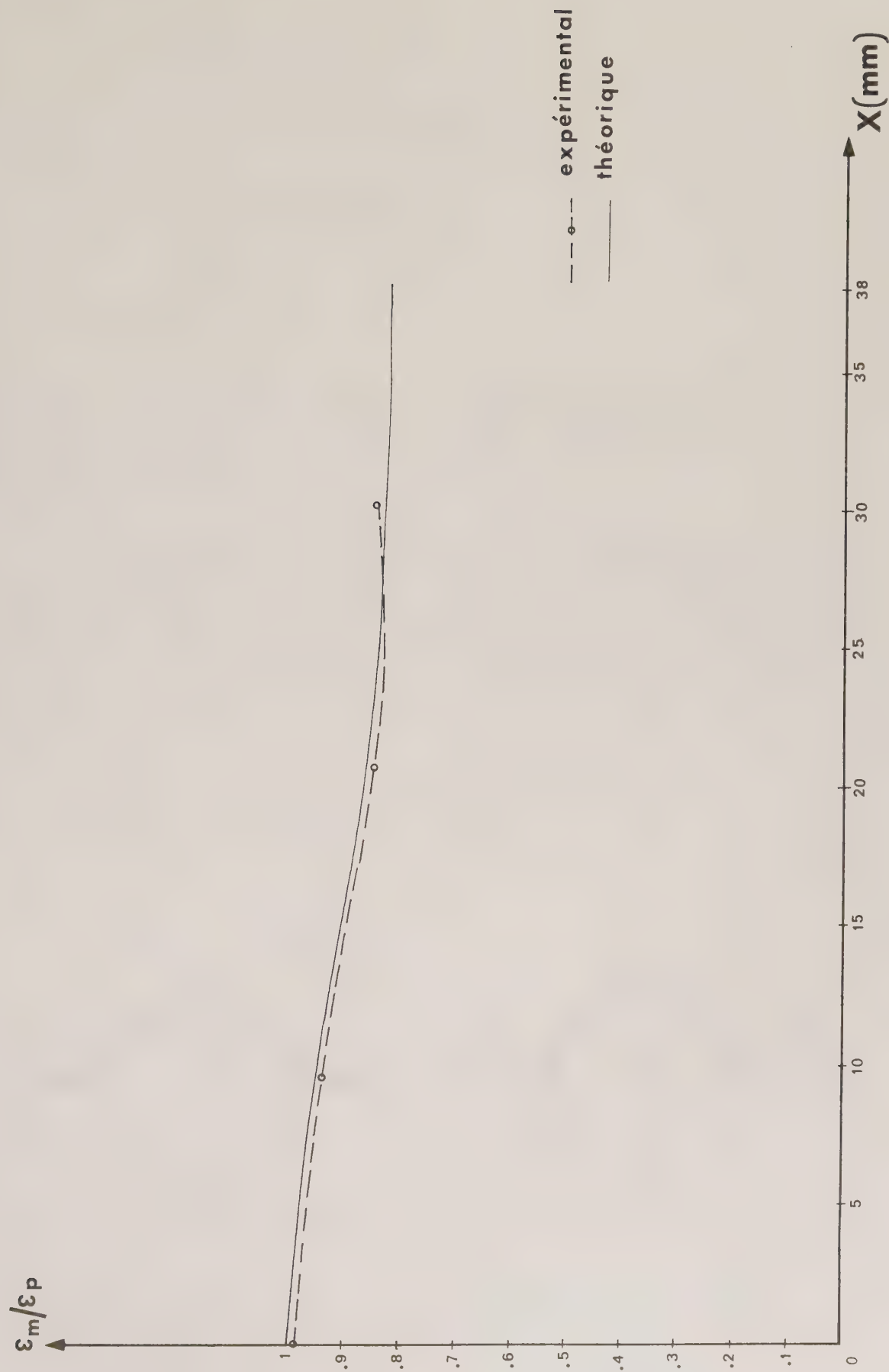




FIG 38 : RAPPORT DES DEFORMATIONS LE LONG D'UN MERIDIEN





## C H A P I T R E    I I I

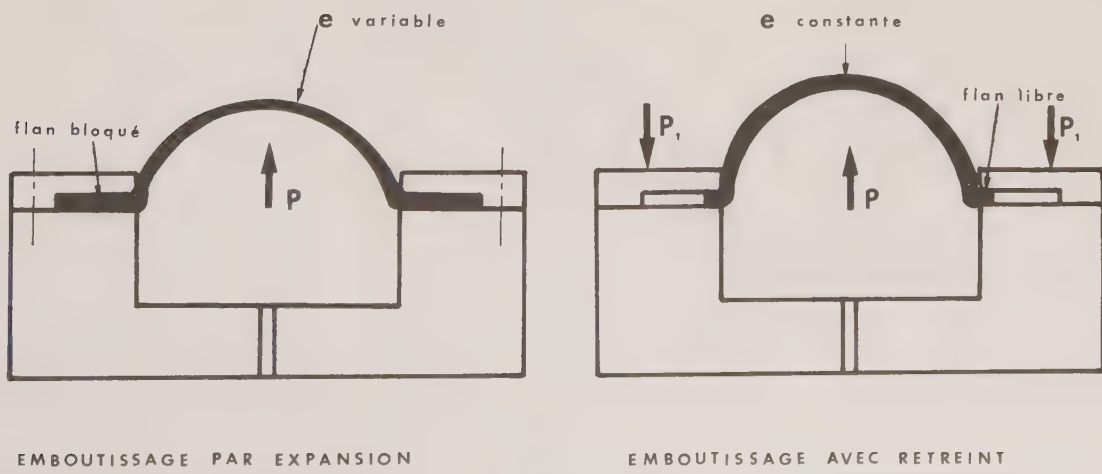
### - Bulging avec rétreint -

#### III.1. Introduction

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré l'emboutissage par expansion : le pourtour du flan étant bloqué, la déformation se fait par étirement de la tôle, d'où un amincissement important qui provoque la rupture prématurée de l'embouti.

Un autre mode de déformation bien connu, l'emboutissage avec rétreint, consiste à laisser glisser le métal sous le serre-flan, ce dernier étant soumis à une légère pression pour éviter la formation de plis dans la tôle. Il permet d'obtenir des pièces profondes et d'épaisseur sensiblement constante. Les deux modes de déformation sont donnés fig. 39.

Fig. 39 : les deux modes principaux de déformation





Bien qu'on ait souvent recours à la technique du rétreint tant en ce qui concerne les tests permettant de caractériser l'aptitude à l'emboutissage des tôles, que pour l'emboutissage industriel, jamais à notre connaissance, des essais de rétreint n'ont été faits par gonflement au moyen d'une pression hydraulique.

Dans le but d'obtenir des "bulles" plus élevées et surtout pour tester la faisabilité de ce procédé, nous nous sommes proposés de tenter des essais de bulging avec rétreint.

### III.2. Approche théorique

#### III.2.1. Mise en équation

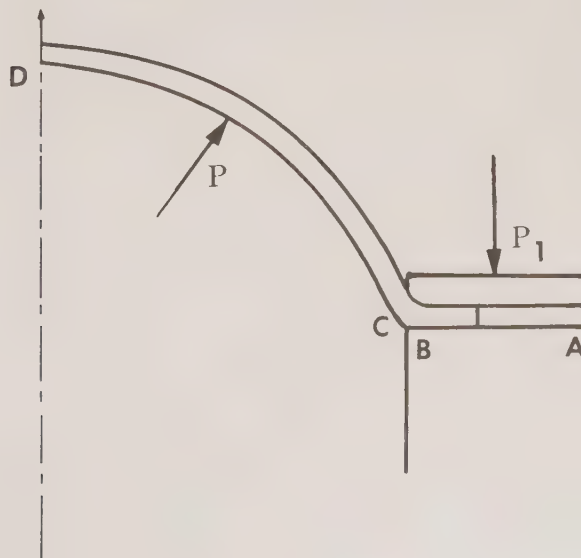
Au cours de l'opération d'emboutissage, selon la zone de l'embouti, nous pouvons distinguer plusieurs types de déformation (fig. 40) :

AB : zone en rétreint ; allongement dans la direction radiale, rétrécissement dans la direction circonférencielle.

BC : pliage

CD : expansion biaxiale

Fig. 40 : les différentes zones de l'embouti





Au niveau du pliage, les contraintes sont connues [39] . En ce qui concerne la zone CD, il faudrait reprendre le problème étudié au chapitre I en modifiant les conditions aux limites, puisqu'il n'y a plus encastrement au niveau du diamètre utile. Nous ne considérerons, dans ce travail, que les déformations de la zone en rétreint, ce qui nous permettra de comprendre le rôle joué par le serre-flan.

On suppose que la tôle est un corps rigide-plastique qui obéit au critère d'écoulement de Von Mises et que l'épaisseur de la tôle reste constante sous le serre-flan. On négligera la déformation élastique.

Le problème a déjà été abordé en partie par P. BAQUE et Co [40] (introduction d'une force de frottement constante), par Parnière et Sang [41] (influence de l'écrouissage sur le rapport limite d'emboutissage), par Hill [34] (mise en équation du problème en contraintes planes).

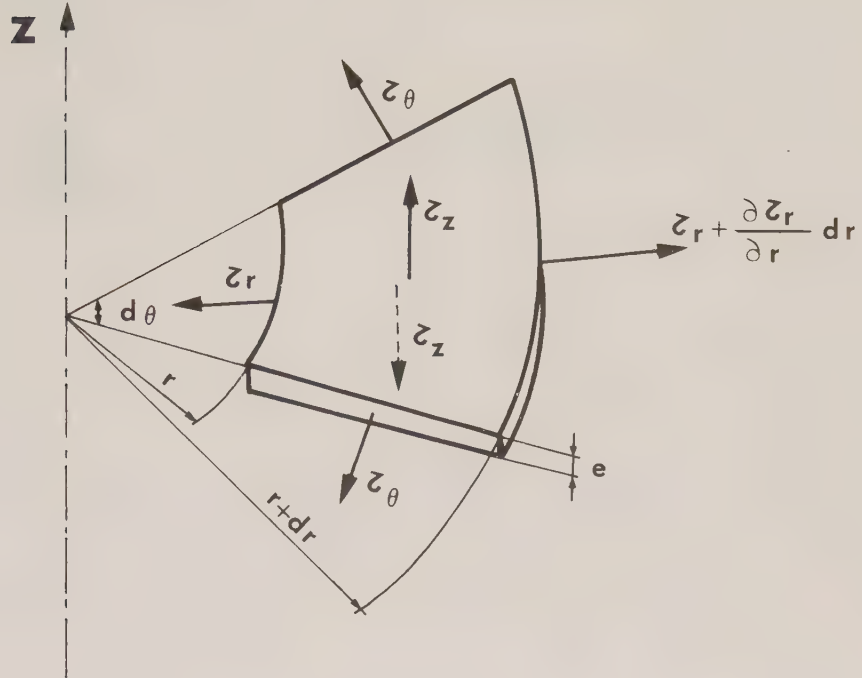
Nous approfondirons l'étude en tenant compte, dans ce travail, d'une force de frottement proportionnelle à la contrainte normale  $\tau_z$  et de l'écrouissage de la tôle, pour calculer contraintes et déformations.

Pour une tranche d'épaisseur  $e$ , comprise entre les circonférences voisines  $r$  et  $r+dr$ , l'état des contraintes exprimé en coordonnées polaires  $(r, \theta, z)$ , indépendant de  $\theta$  et de  $z$ , est représenté sur la fig. 41.

Nous appellerons  $\mu$  le coefficient de frottement tôle-serre-flan.



Fig. 41 : équilibre d'un élément de la collerette



Les forces s'exerçant sur le volume élémentaire représenté sur la fig. 41 permettent d'écrire l'équilibre selon  $r$  :

$$\frac{d\tau_r}{dr} + \frac{\tau_r - \tau_\theta}{r} - \mu \frac{\tau_z}{e} = 0 \quad (37)$$

L'épaisseur étant constante, nous sommes dans un problème de déformations planes et  $d\epsilon_z = 0$ .

$$\text{d'où} \quad \tau_z = \frac{\tau_r + \tau_\theta}{2} \quad (38)$$

Le critère de Von Mises s'écrit :

$$(\tau_r - \tau_\theta)^2 = \frac{4}{3} \bar{\sigma}^2$$

$$\text{d'où} \quad \tau_r - \tau_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma} \quad (39)$$

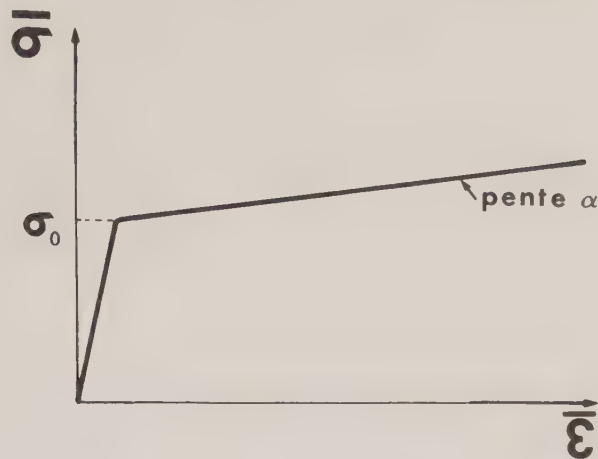
Nous supposons une loi d'écrouissage de la forme (fig. 42) :

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \alpha \bar{\epsilon} \quad (40)$$

avec  $\sigma_0$  et  $\alpha$  constantes.



Fig. 42 : courbe de traction



$$\text{d'où : } \tau_r - \tau_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} (\sigma_0 + \alpha \bar{\epsilon}) = a + b \bar{\epsilon} \quad (41)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \\ b = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\bar{\epsilon}$  est fonction du rayon extérieur  $R$  et du rayon courant  $r$ .

La loi de continuité nous donne :

$$r \, dr = R \, dR$$

Le calcul des déformations s'effectue très simplement par les formules :

$$\begin{cases} d \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ d \epsilon_z = 0 \\ d \epsilon_r = - d \epsilon_\theta \end{cases} \quad (42)$$

(en plasticité, le premier invariant des déformations est nul).

et les déplacements sont donnés par :



$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = dr \\ u_\theta = 0 \\ u_z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{par raison de symétrie}) \quad (43)$$

L'utilisation d'une loi d'écrouissage nécessite l'introduction d'une méthode de calcul pas à pas car  $\bar{\epsilon} = f(R, r)$ , or le rayon extérieur  $R$  varie constamment.

Nous partons d'un flan de rayon extérieur initial  $R_0$  et nous lui imposons une "petite" diminution de rayon  $\delta R$  ( $\delta R < 0$ ). Nous obtenons un rayon  $R_1$ . Nous calculons les contraintes et les déformations correspondantes et en particulier  $\bar{\epsilon}_1$ . La connaissance de la déformation équivalente  $\bar{\epsilon}_1$  nous permet de franchir une étape et de recommencer les calculs pour un nouveau rayon extérieur. Nous appellerons  $i$  l'indice de l'étape.

- 1ère étape -

$R_0$  devient :  $R_1 = R_0 + \delta R$

$\bar{\epsilon}_0 = 0$

Le critère de Von Mises s'écrit :  $\tau_{r_1} - \tau_{\theta_1} = a$

et l'équation d'équilibre :

$$\frac{d\tau_{r_1}}{dr} + \frac{a}{r} - \frac{\mu}{2e} (2 \tau_{r_1} - a) = 0$$

Cette équation différentielle du 1er ordre s'intègre numériquement grâce à la méthode de Runge-Kutta-Gill, et nous donne  $\tau_{r_1}$  en fonction de  $r$ .

$$\text{On en déduit : } \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\theta_1} = \tau_{r_1} - a \\ \tau_{z_1} = \tau_{r_1} - \frac{a}{2} \end{array} \right.$$

On calcule alors les déformations :



$$\left\{ \begin{array}{l} d \varepsilon_{\theta_1} = \frac{dr}{r} = \frac{R_0 \delta R}{r^2} \\ d \varepsilon_{r_1} = - \frac{R_0 \delta R}{r^2} \\ d \varepsilon_{z_1} = 0 \end{array} \right.$$

or  $\overline{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} (d \varepsilon_r^2 + d \varepsilon_\theta^2 + d \varepsilon_z^2)$

d'où :  $\overline{d\varepsilon_1} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R_0 \delta R}{r^2}$

et  $\overline{\varepsilon_1} = \overline{\varepsilon_0} + \overline{d\varepsilon_1} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R_0 \delta R}{r^2}$

Les déplacements sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{R_0 \delta R}{r} \\ u_\theta = 0 \\ u_z = 0 \end{array} \right.$$

- i<sup>ème</sup> étape -

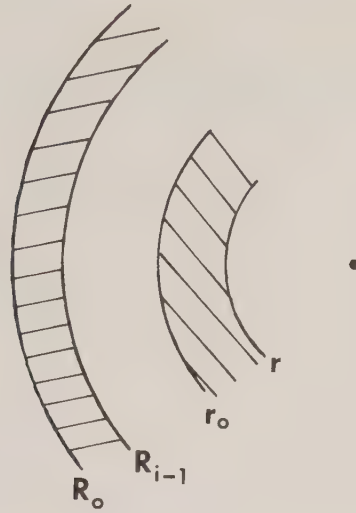
Le rayon extérieur  $R_{i-1}$  devient :  $R_i = R_{i-1} + \delta R = R_0 + i \delta R$

$$\overline{d\varepsilon_{i-1}} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R_{i-1} dR}{r^2}$$

Le rayon courant  $r$  était à l'instant initial  $r_0$ , tandis que le rayon extérieur  $R_{i-1}$  avait pour valeur  $R_0$  (Fig. 43).



Fig. 43 : conservation de la surface



En plasticité, il y a conservation du volume, donc de la surface (puisque  $\epsilon_z = 0$ ) :

$$\pi (R_o^2 - R_{i-1}^2) = \pi (r_o^2 - r^2)$$

$$\text{d'où : } \overline{d \epsilon_{i-1}} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R_{i-1} dR}{r_o^2 - R_o^2 + R_{i-1}^2}$$

on en déduit immédiatement la déformation équivalente :

$$\overline{\epsilon_{i-1}} = - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log} \frac{r_o^2 - R_o^2 + R_{i-1}^2}{r_o^2} \quad (44)$$

$$\tau_{r_i} - \tau_{\theta_i} = a - \frac{b}{\sqrt{3}} \text{Log} \frac{r_o^2 - R_o^2 + R_{i-1}^2}{r_o^2} \quad (45)$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{d \tau_{r_i}}{dr} + \frac{a}{r} - \frac{b}{\sqrt{3}} \frac{1}{r} \text{Log} \frac{r_o^2 - R_o^2 + R_{i-1}^2}{r_o^2} - \frac{\mu}{2e} (2\tau_{r_i} - a + \frac{b}{r\sqrt{3}} \text{Log} \frac{r_o^2 - R_o^2 + R_{i-1}^2}{r_o^2}) = 0 \quad (46)$$

et s'intègre comme précédemment par la méthode de Runge-Kutta-Gill que nous rappelons brièvement.

Soit l'équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  et les conditions initiales  $y_o = y(x_o)$ .



Le traitement numérique est fait par les formules de Runge-Kutta au 4ème ordre :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \left[ k_0 + 2 k_1 + 2k_2 + k_3 \right]$$

où, pour un pas h :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = h f (x_n, y_n) \\ k_1 = h f (x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}) \\ k_2 = h f (x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1^2}{2}) \\ k_3 = h f (x_n + h, y_n + k_2) \end{array} \right.$$

Connaissant  $\tau_{r_i}$ , nous en déduisons  $\tau_{\theta_i}$  et  $\tau_{z_i}$ , puis  $\overline{\epsilon_i}$ . Nous continuons les calculs jusqu'à ce que  $R_i$  atteigne le rayon intérieur  $R_{int}$  du serre-flan, c'est-à-dire jusqu'à ce que toute la couronne se soit rétreinte.

### III.2.2. Résultats obtenus

Données :

Nous avons adopté les valeurs numériques suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_0 = 2.10^8 \text{ N/m}^2 \\ \alpha = 0,2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2,3.10^8 \text{ N/m}^2 \\ b = 0,23 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} R_0 = 0,1 \text{ m} \\ R_{int} = 0,02 \text{ m} \\ \Delta R = - 10^{-3} \text{ m} \\ e = 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{il y a donc 80 étapes}$$

Les calculs ont été faits sur MITRA 15 avec utilisation du sous-programme IRK1 de CII pour l'intégration de l'équation différentielle. La condition initiale utilisée est, à chaque étape,  $\tau_r (R_i) = 0$  et nous calculons contraintes et déformations pour un rayon courant allant de  $R_i$  à  $R_{int}$ .



## Résultats :

a) Les calculs ont d'abord été faits dans le cas simple où il n'y a ni frottement ni écrouissage ( $\mu = 0$  et  $\bar{\sigma} = \sigma_0$ ).

L'équation d'équilibre :

$$\frac{d\tau_r}{dr} + \frac{\sigma_0}{r} = 0$$

s'intègre alors directement et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_r = \sigma'_0 \operatorname{Log} \frac{R_i}{r} \\ \tau_\theta = \sigma'_0 \left( \operatorname{Log} \frac{R_i}{r} - 1 \right) \\ \tau_z = \sigma'_0 \left( \operatorname{Log} \frac{R_i}{r} - \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \quad (47)$$

avec  $\sigma'_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0$ , contrainte plane d'écoulement.

$\tau_r$ , contrainte de traction, est toujours positive. Tant que  $r$  est assez grand,  $\tau_z$  est négative (la tôle est légèrement comprimée par le serre-flan). Mais il existe un certain rayon  $r$  pour lequel  $\tau_z$  s'annule, qui vérifie l'égalité :

$$\operatorname{Log} \frac{R_i}{r} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{d'où} \quad r = \frac{R_i}{e^{1/2}} \approx 0,61 R_i .$$

Ensuite, pour  $r < 0,61 R_i$ ,  $\tau_z$  devient positive. L'hypothèse de déformation plane n'est plus vérifiée.

D'autre part, la contrainte radiale  $\tau_r$  a sa valeur maximale pour le rayon intérieur  $R_{\text{int}}$  :

$$\tau_r (R_{\text{int}}, R_i) = \sigma'_0 \operatorname{Log} \frac{R_i}{R_{\text{int}}}$$

On constate que la force d'emboutissage est maximale au début de l'essai (quand  $R_i = R_0$ ) et qu'il existe un rapport limite d'emboutissage donné par :



$$\frac{\tau_r (R_{int}, R_i)_{max}}{\sigma'_0} = 1$$

d'où :  $\left(\frac{R_o}{R_{int}}\right)_{max} = e \approx 2,7$

Ce rapport limite d'emboutissage noté habituellement LDR (limiting drawing ratio) est évidemment fonction des conditions de l'essai (lubrification, pression du serre-flan...) puisque, comme nous allons le voir, le frottement modifie la valeur des contraintes.

#### Résumons :

Pour  $r > 0,61 R_i$ , on est dans un problème de déformations planes, les contraintes sont connues.

Pour  $r < 0,37 R_i$ , l'emboutissage n'est plus possible.

Pour  $0,37 R_i < r < 0,61 R_i$ , dans quel état sommes-nous ?

Les auteurs qui ont étudié le rétreint ont, soit ignoré le changement de signe de  $\tau_z$  [41], soit donné l'idée de continuer le travail en contraintes planes [40], mais sans la mettre en pratique, et c'est ce que nous nous sommes proposés de faire.

Lorsque  $\tau_z = 0$ , le critère de Von Mises s'écrit :

$$\tau_r^2 + \tau_\theta^2 - \tau_r \tau_\theta = \sigma_0^2 \quad (48)$$

alors 
$$\tau_\theta = \frac{\tau_r - \sqrt{4 \sigma_0^2 - 3 \tau_r^2}}{2}$$

L'équation d'équilibre  $\frac{d\tau_r}{dr} + \frac{\tau_r - \tau_\theta}{r} = 0$  devient :

$$\frac{d\tau_r}{dr} + \frac{\tau_r}{2r} + \frac{\sqrt{4 \sigma_0^2 - 3 \tau_r^2}}{2r} = 0$$

Elle s'intègre facilement par méthode numérique de  $r = 0,61 R_i$  à  $r = 0,37 R_i$ , en prenant pour condition initiale la valeur  $\tau_r (0,61 R_i)$  que l'on a trouvé en déformation plane. Mais on constate que les valeurs de  $\tau_\theta$  trouvées ne sont pas continues au point  $r = 0,61 R_i$  et il est bien évident que cette discontinuité est incompatible avec la réalité et avec la façon dont ont été faits les calculs.



En effet, au point  $r = 0,61 R_i$ , on a :  $\text{Log } \frac{R_i}{r} = \frac{1}{2}$  et,

en déformation plane :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_r = \frac{\sigma'_0}{2} \\ \tau_\theta = -\frac{\sigma'_0}{2} \\ \tau_z = 0 \end{array} \right.$$

Le critère :  $\tau_r^2 + \tau_\theta^2 - \tau_r \tau_\theta = \sigma_0^2$  : (48) est donc bien vérifié.

En contrainte plane, on fixe  $\tau_r = \frac{\sigma'_0}{2}$  par continuité avec le cas de la déformation plane et on calcule  $\tau_\theta$  à partir de l'équation (48) donnée par le même critère.

$\tau_\theta$  est donc forcément continu pour  $r = 0,61 R_i$ .

La discontinuité observée provient certainement des imprécisions du calcul numérique.

b) Influence du frottement à écrouissage nul.

Les résultats suivants ne sont valables que tant que  $\tau_z$  est négatif. On utilise les équations (37), (38) et (39).

Dans le cas où il n'y a pas d'écrouissage, les résultats sont uniquement fonction du rapport  $\frac{\mu R_i}{e}$ . Plus ce rapport est élevé et plus la couronne en état de déformation plane est mince ; autrement dit,  $\tau_z$  change de signe pour  $r$  supérieur à  $0,61 R_i$  lorsqu'il y a du frottement.

Le tableau suivant (fig. 44) donne les valeurs du rayon  $r$  correspondant au changement de signe de la contrainte  $\tau_z$  en fonction du rapport  $\frac{\mu R_i}{e}$ .

Fig. 44 : influence du frottement sur la largeur de la couronne en déformation plane

| $\mu$ | $\frac{\mu R_i}{e}$ | $r$        |
|-------|---------------------|------------|
| 0     | 0                   | $0,61 R_i$ |
| 0,1   | 10                  | $0,82 R_i$ |
| 0,2   | 20                  | $0,87 R_i$ |
| 0,5   | 50                  | $0,9 R_i$  |



Donc, une épaisseur importante, un coefficient de frottement et un rayon extérieur faibles favorisent l'importance de la couronne en état de déformation plane lors du rétreint.

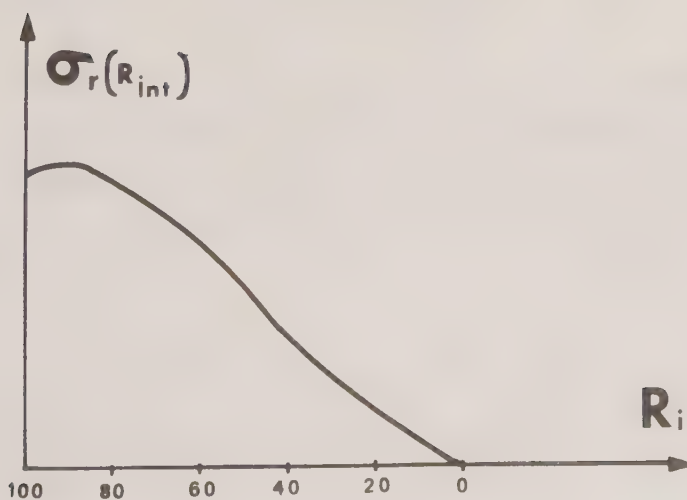
c) Influence de l'écrouissage à frottement nul.

On intègre l'équation (46) en faisant  $\mu = 0$ .

D'après le § a,  $\sigma_z$  change de signe pour  $r = 0,61 R_i$ , la valeur de  $r$  critique décroissant en cours de formage comme celle de  $R_i$ .

D'autre part, l'évolution de la contrainte radiale  $\tau_r (R_{int})$  en fonction de l'avancement de la déformation est montrée fig. 45. On voit que la force d'emboutissage n'est plus maximale au début de l'essai. Dans la première partie de l'emboutissage, l'augmentation de  $\tau_r (R_{int})$  est due à l'écrouissage ; ensuite, la diminution de la surface de la tôle située sous le serre-flan l'emporte et  $\tau_r (R_{int})$  diminue. Cela signifie que le rapport limite d'emboutissage ne peut plus être déterminé au départ, mais seulement quelques étapes plus tard, au maximum de  $\tau_r (R_{int})$ .

Fig. 45 : évolution de la contrainte radiale du rayon intérieur, en fonction du rayon extérieur





Le rapport limite  $r/R_0$  qui permet l'emboutissage sans rupture est dans notre cas égal à 0,38, ce qui donne un  $LDR(\frac{R_0}{R_{int}})_{max}$  de 2,6 (au lieu de 2,7 lorsqu'on ne tient pas compte de l'écrouissage).

La conclusion que l'on peut en tirer est que l'écrouissage n'influence pratiquement pas la déformation par rétreint, aussi bien en ce qui concerne le LDR que le rapport  $r/R_i$  correspondant au changement de signe de  $\tau_z$ .

d) Cas de l'existence simultanée du frottement et de l'écrouissage.

Il suffit de cumuler les remarques faites aux deux paragraphes précédents. Les figures 46, 47 et 48, 49 donnent l'évolution des contraintes  $\tau_r$  et  $\tau_\theta$  en fonction du rayon courant, pour des rayons extérieurs  $R_i$  égaux respectivement à 99 mm et 65 mm, le rayon extérieur initial  $R_0$  étant toujours de 100 mm.

Ces courbes ne sont théoriquement valables que dans la zone de déformation plane, c'est-à-dire pour un rayon  $r$  supérieur à un certain rayon  $r_{crit}$ , pour lequel  $\tau_z$  s'annule.

$r_{crit}$  est d'autant plus petit que le rayon extérieur  $R_i$  et le coefficient de frottement  $\mu$  sont faibles.

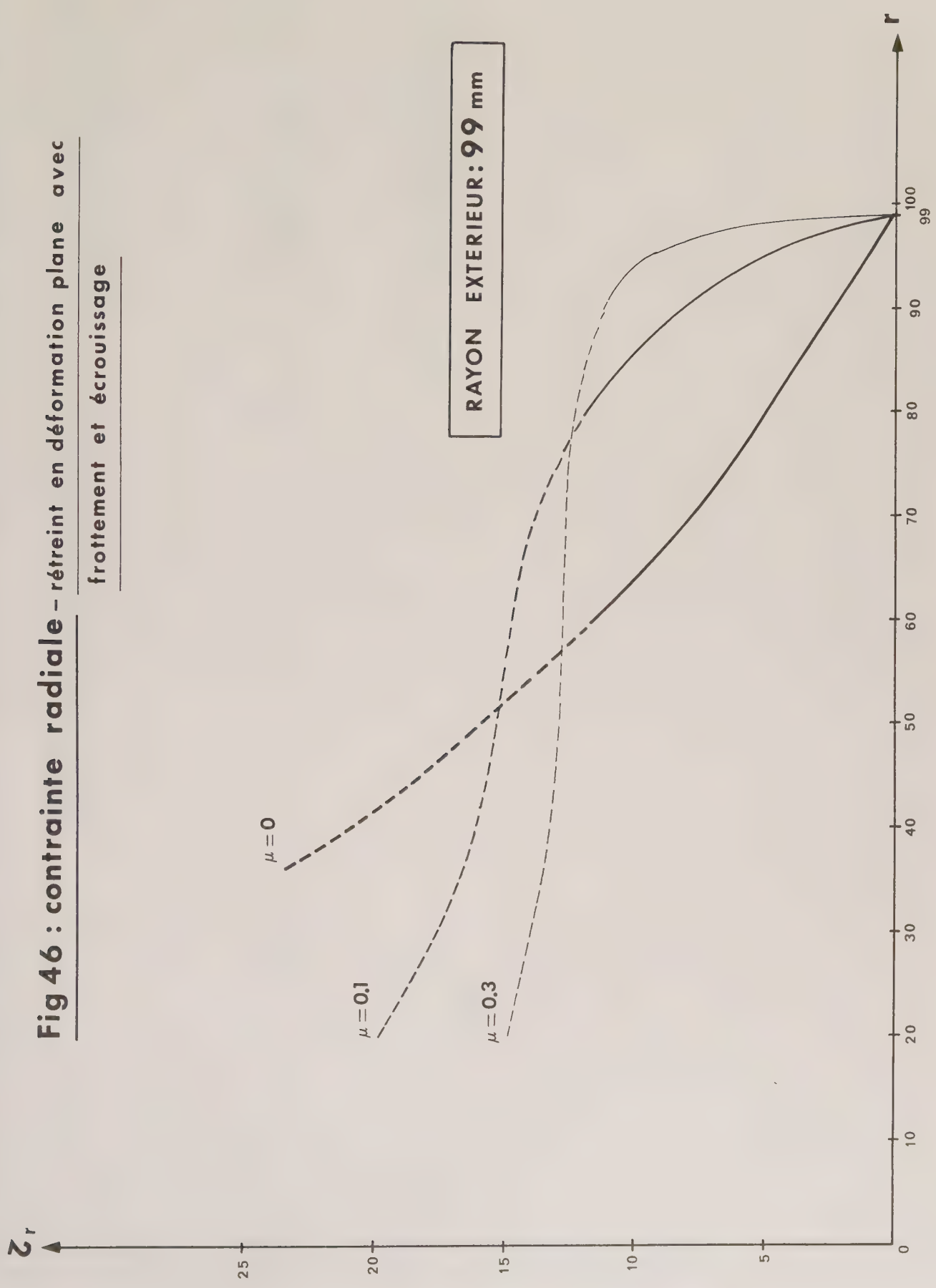
Quand il n'y a pas de frottement, les contraintes  $\tau_r$  et  $\tau_\theta$  augmentent progressivement de  $R_i$  à  $R_{int}$ . L'apparition du frottement provoque une augmentation brutale des contraintes sur le bord, augmentation d'autant plus importante que  $\mu$  est grand, mais qui se stabilise d'autant plus vite.

En conclusion, on peut dire que l'écrouissage n'influence pratiquement pas l'emboutissage par rétreint tandis que le frottement diminue l'importance de la zone en déformation plane. D'autre part, dans cette zone où l'on a pu faire la mise en équations, le frottement induit des contraintes élevées.

Cela montre l'importance de la lubrification dans l'emboutissage avec rétreint.



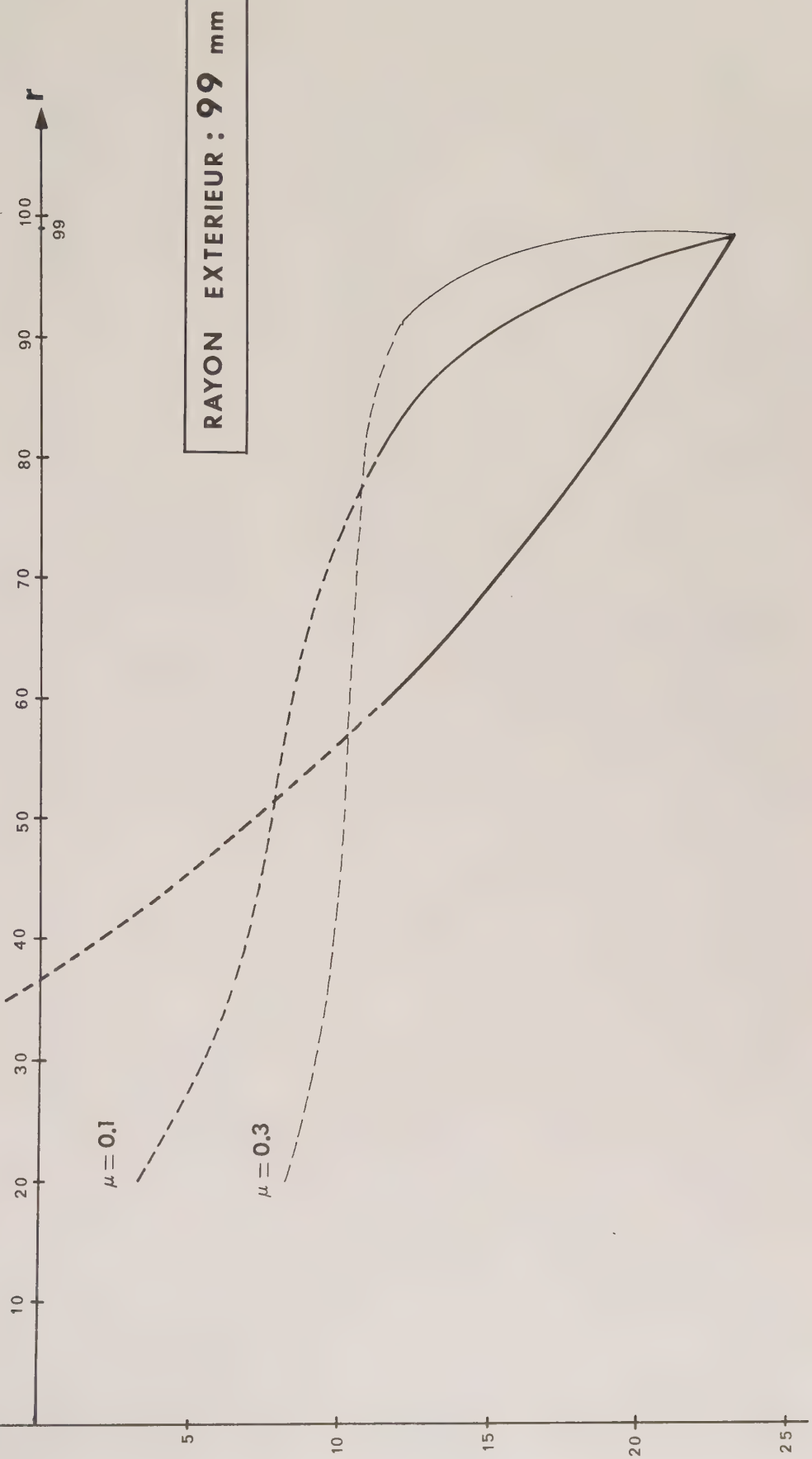
**Fig 46 : contrainte radiale - rétreint en déformation plane avec frottement et écrouissage**





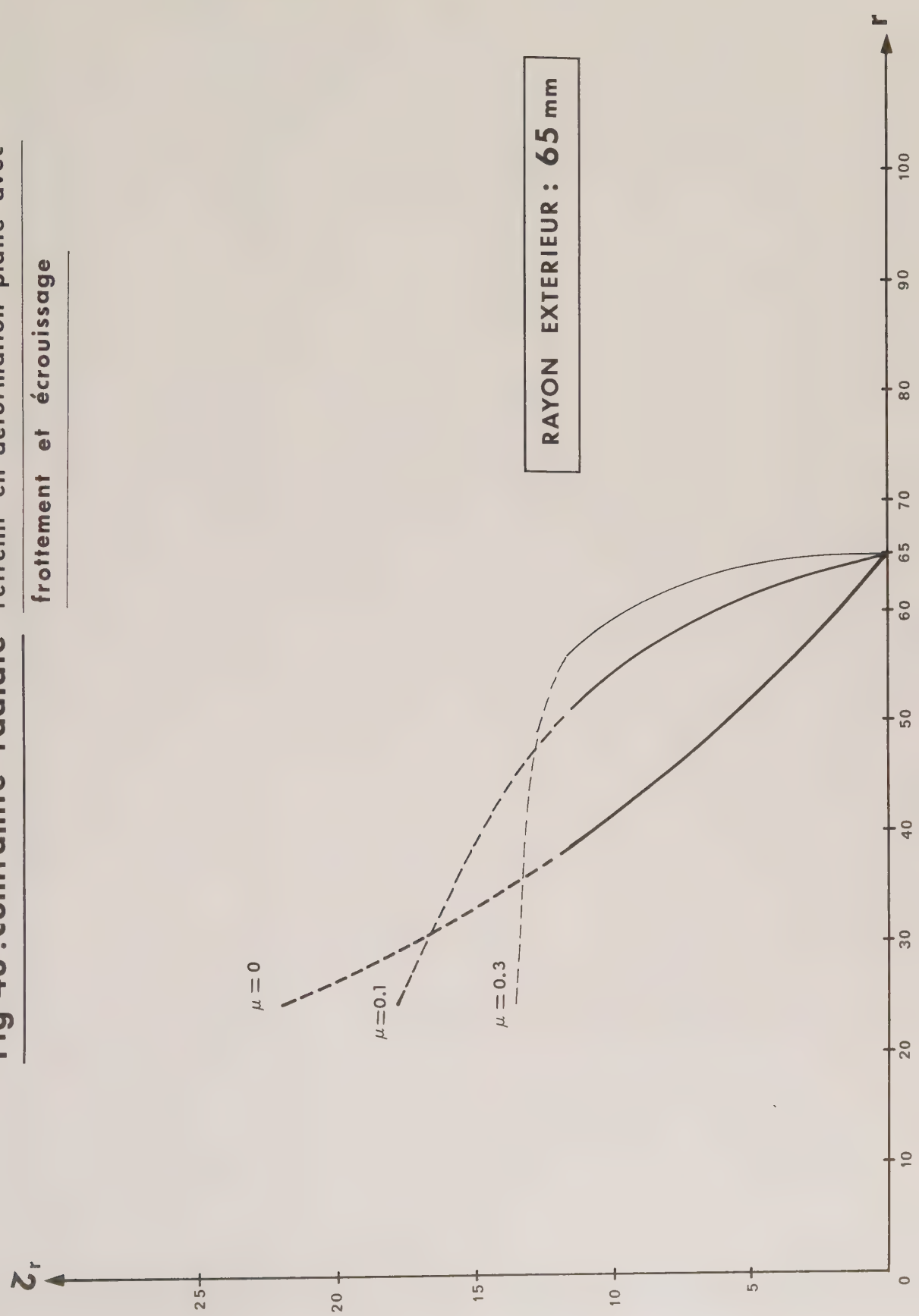
$\Delta z_\theta$

**Fig 47 : contrainte tangentielle - rétreint en déformation plane avec frottement et écrouissage**





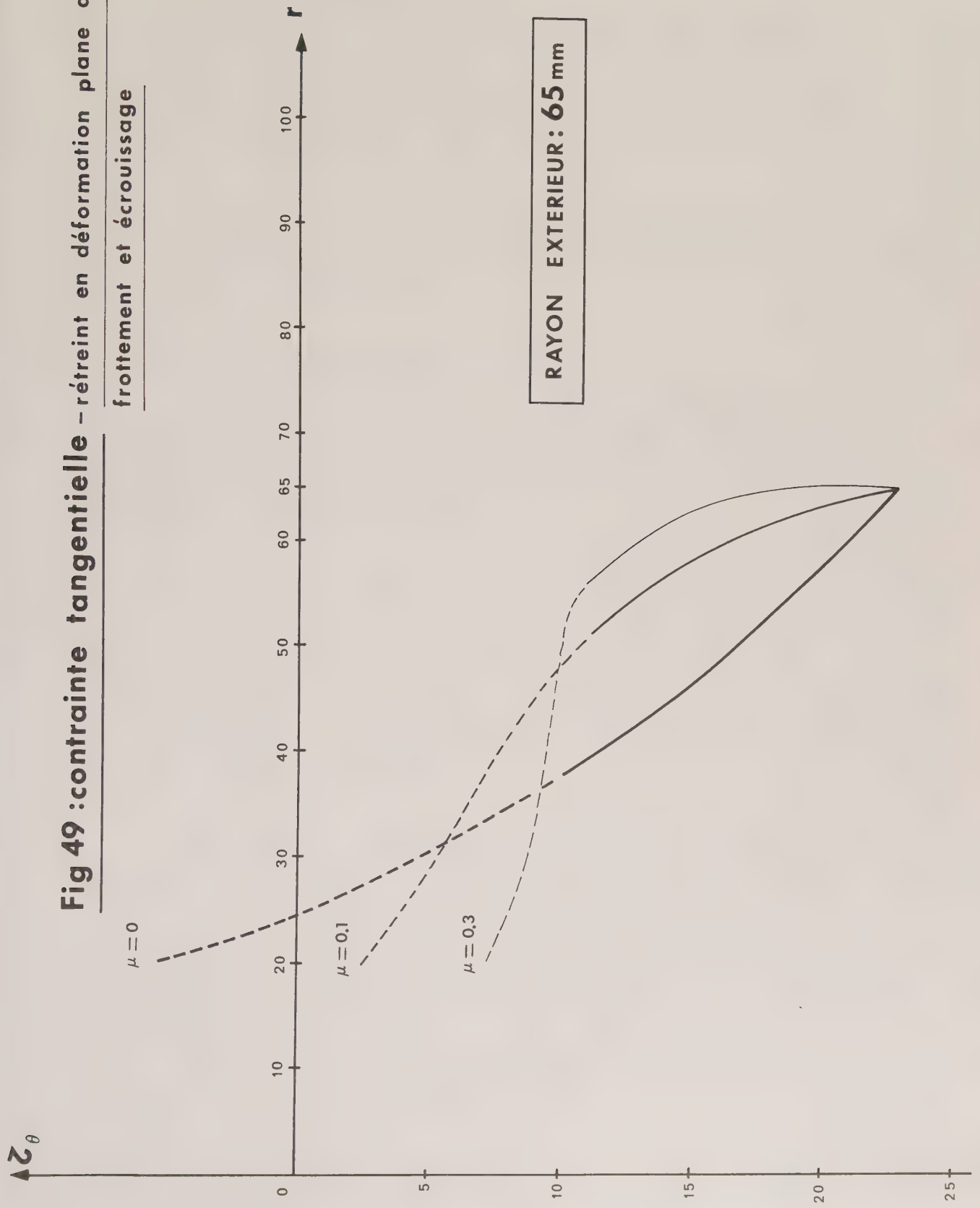
**Fig 48: contrainte radiale - rétreint en déformation plane avec frottement et écrouissage**





**Fig 49 : contrainte tangentielle - rétreint en déformation plane avec**

**frottement et écrouissage**





### III.3. Essais de rétreint :

#### III.3.1. Matériel utilisé :

Nous utilisons le même matériel que pour l'emboutissage par expansion (voir fig. 20) : une pompe à main, un réservoir d'huile, un manomètre, un pôt. Mais la tôle n'est plus bloquée sous le serre-flan, elle doit pouvoir glisser librement. Nous verrons les différentes solutions adoptées pour la maintenir.

Nous travaillons avec des plaques en aluminium commercial ou en UZ 33, d'épaisseur 0,8 mm, de diamètre extérieur initial 100 mm et de diamètre de passage 76 mm.

#### III.3.2. Chronologie des essais :

L'emboutissage hydraulique avec rétreint n'ayant jamais été pratiqué avant ce travail, nous avons été confrontés à des problèmes d'ordre expérimental et de nombreux essais ont dû être faits avant de trouver une solution satisfaisante.

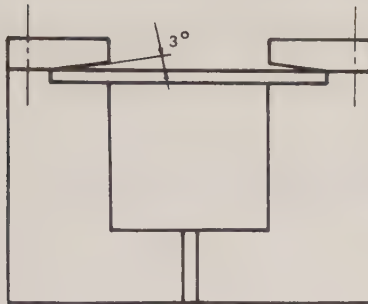
Au départ, nous pensions que la difficulté essentielle proviendrait des fuites puisque la couronne extérieure n'était plus bloquée. Pour les éviter, nous avons recouvert la tôle d'une feuille mince de caoutchouc qui en épousait la forme, le serre-flan venant appuyer sur l'ensemble. Mais le coefficient de frottement caoutchouc-métal trop important a empêché le rétreint de la plaque et nous avons obtenu un embouti par expansion.

Nous avons alors supprimé la membrane et laissé entre flan et serre-flan un jeu de 0,1 mm. L'emboutissage se déroule alors en deux étapes : il y a d'abord une déformation avec rétreint, puis lorsque la surface de la couronne a diminué d'environ la moitié, elle se bloque et la pièce se déforme par expansion. Ainsi, on n'obtient pas les fuites d'huile prévues, mais une tendance à l'augmentation de l'épaisseur de la collerette. Cependant, on reste en déformation plane avec  $\tau_z$  qui croît ; la réaction du serre-flan bloque alors le rétreint complet de la tôle.



Pour éviter ce blocage, nous avons fait un léger cône sur le serre-flan de façon à faciliter l'écoulement de la matière (fig. 50). Autrement dit, nous cherchons à nous placer dans les conditions  $\tau_z = 0$ . Ces essais ne coïncident plus avec les calculs effectués au § III.2..

Fig. 50 : Cône sur le serre-flan.

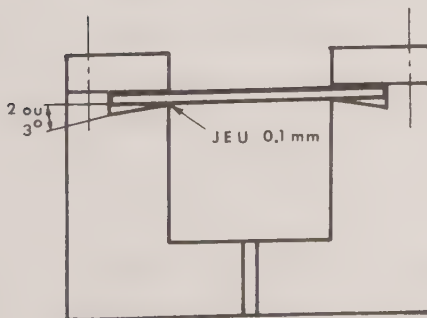


Il y a alors rétreint complet de la collerette, mais sur un côté seulement, une dissymétrie importante apparaissant qui s'amplifie au cours de la déformation. De plus, des plis se forment sur le pourtour.

Le polissage du serre-flan qui, à notre avis aurait dû faciliter l'écoulement de la matière, n'a fait qu'accentuer la dissymétrie de la pièce.

Puisqu'il semble que l'épaisseur de la collerette augmente légèrement au cours du rétreint, l'idée nous est venue d'éviter la dissymétrie en freinant le côté le plus rétreint au moyen d'un "cône inversé" sur le pôt (voir fig. 51). Les résultats obtenus sont en partie satisfaisants.

Fig. 51 : Cône inversé.



Un cône de 2° avec jeu minimum de 0,1 mm nous donne un embouti fait de déformation à la fois par expansion et par rétreint. La pression maximale du fluide avant rupture de la coque en laiton en son sommet est de 30 bars.

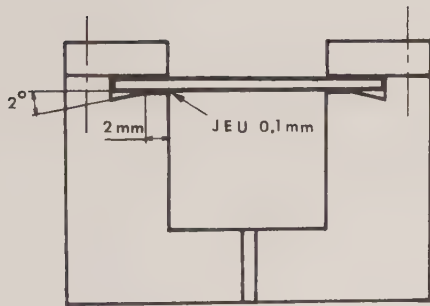


Un cône de  $3^\circ$  avec jeu minimum de 0,1 mm nous donne un embouti fait uniquement de déformation par rétreint. Il n'y a aucun étirement de la matière, la surface du flan n'ayant pas varié. La pression maximale obtenue est de 20 bars.

Dans les deux cas subsiste une très légère dissymétrie.

Enfin, nous avons essayé un dernier type d'essai : nous utilisons toujours un cône inversé, mais terminé par un anneau plan parallèle au serre-flan (fig. 52).

Fig. 52 : Forme du pôt la plus favorable.



La déformation de l'embouti obtenue en partie par expansion en partie par rétreint est absolument symétrique. Cependant, il est difficile d'expliquer pourquoi cette forme de pôt est meilleure. Peut-être est-ce dû au frottement plus important qui régularise le glissement d'ensemble de la pièce.

A l'issue de ces essais, il apparaît que l'emboutissage hydraulique avec rétreint est possible ; mais les conditions d'obtention d'une pièce axisymétrique quoique partiellement connues restent encore inexpliquées et le petit nombre de nos emboutis "réussis" ne peut nous permettre d'affirmer des résultats définitifs.

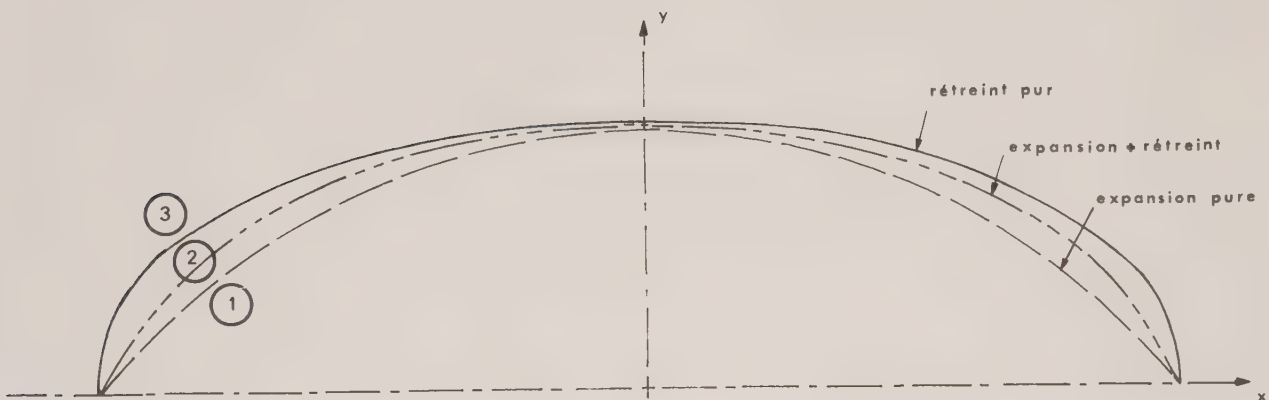
Nous ferons simplement quelques remarques susceptibles d'aider à la poursuite éventuelle de ces travaux.

Nous considérons le type d'essai le plus performant, celui de la fig. 52 . Seule l'expérience peut nous permettre de déterminer l'angle et le jeu entre pôt et tôle en fonction du matériau et du mode de déformation souhaité, puisque les hypothèses de calcul que nous avons faites ne sont pas vérifiées. Nous avons constaté qu'un angle et un jeu importants facilitent



les déformations par rétreint au détriment de l'expansion, mais il existe une limite à ne pas dépasser pour conserver l'axisymétrie. Un choix judicieux de ces deux paramètres permet de doser la part d'expansion qu'on autorise à la pièce en fonction des caractéristiques géométriques que l'on désire (épaisseur, forme ...). En effet, une pièce soumise uniquement à du rétreint a une épaisseur constante et une déformée à tangente verticale sur le bord, tandis qu'une pièce emboutie par expansion accuse une diminution d'épaisseur importante au sommet pouvant aller jusqu'à rupture et présente une déformée pratiquement sphérique (fig. 53). Ainsi, on peut obtenir toutes les formes entre l'allure (1) et l'allure (3) .

Fig. 53 : Formes de la déformée en fonction du mode de déformations



En conclusion, nous pensons que le bulging avec rétreint présente de l'intérêt dans la mesure où il permet d'obtenir des déplacements importants, une déformée différente de la sphère et une épaisseur de coque sensiblement constante.

Cependant, il nous paraît difficile d'assurer la parfaite symétrie de chaque pièce. Il serait intéressant de tester la faisabilité d'un procédé intermédiaire entre l'emboutissage traditionnel (avec poinçon et matrice) et le bulging : on pourrait utiliser soit un poinçon soit une



matrice, avec, de l'autre côté, une contre-pression hydraulique. Cela permettrait de réduire le coût de l'outillage traditionnel tout en assurant la symétrie de l'embouti. L'utilisation de jauges de contraintes réparties sur la face libre de la coque donnerait les déformations difficilement accessibles par le calcul.



DEUXIEME PARTIE

\*\*\*\*\*  
\* FORMAGE HYDRAULIQUE A \*  
\* \*  
\* CHAUD \*  
\* \*  
\*\*\*\*\*



## Introduction au bulging à chaud

Dans cette deuxième partie, nous présentons les résultats des essais de bulging effectués à chaud.

Le travail à chaud qui nécessite un appareillage assez sophistiqué, se justifie par la possibilité d'obtenir de grandes déformations et ceci au moyen de pressions relativement faibles.

Nous avons tout d'abord tracé la courbe limite d'emboutissage à rupture du matériau superplastique qui a fait l'objet de la thèse de BRANDON [2] : l'alliage eutectoïde zinc-aluminium 78-22, au sujet duquel ont été faits de nombreux travaux [42], [43], mais dont personne à notre connaissance n'a étudié les courbes limites de formage.

Ensuite, dans le but de déterminer si le "fluoformage" peut présenter un intérêt industriel, nous avons voulu savoir s'il était possible, à l'aide d'une pression hydraulique, d'obtenir des pièces de forme précise, semblables à celles que nous fournit l'emboutissage traditionnel. En effet, le bulging tel que nous l'avons considéré dans la première partie, permet d'obtenir des emboutis de forme sphérique (à froid) ou ogivale (à chaud [2]), qui servent d'essais normalisés pour l'emboutissage des tôles, mais dont l'utilisation pratique n'est guère possible. Nous avons envisagé la forme la plus simple, une coupelle cylindrique à fond plat, et étudié les caractéristiques géométriques des pièces obtenues.



## CHAPITRE IV

### - Courbe limite d'emboutissage à rupture de l'alliage Zn-Al -

#### IV.1. Nécessité des courbes limites d'emboutissage.

##### IV.1.1. Existence de déformations limites :

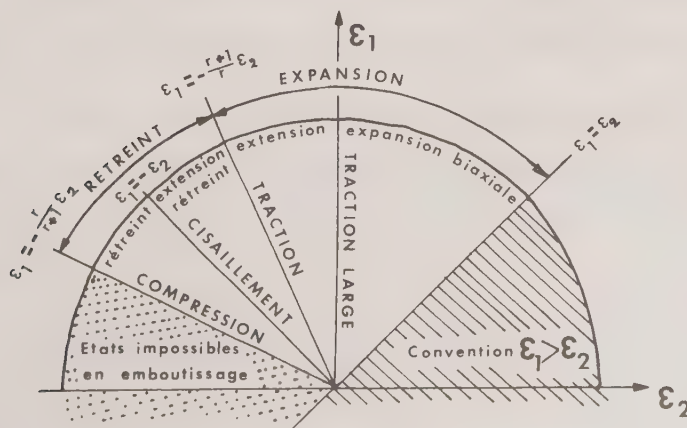
On sait que pour un essai de traction uniaxiale, l'allongement du métal est limité. En effet, deux phénomènes sont en compétition : l'écrouissage mesuré par la pente de la courbe rationnelle  $\sigma = f(\epsilon)$  et l'accroissement de la contrainte appliquée dû à la diminution de la section de l'éprouvette. Du fait que la consolidation décroît avec la déformation, il arrive un moment où l'accroissement de résistance dû à l'écrouissage ne peut plus équilibrer l'accroissement de contrainte appliquée. Une instabilité naît, qui va provoquer une striction diffuse, puis une striction locale, conduisant à la rupture.

Pour un mode simple de déformation quelconque, ce même phénomène d'instabilité existe. KEELER [44], dans le domaine de l'expansion biaxiale, et GOODWIN [45], dans le domaine de la traction-compression (voir fig. 54), ont montré qu'il existait effectivement une courbe limitant la zone des déformations avant rupture en emboutissage, et ont tracé les premières courbes limites d'emboutissage à rupture.

##### IV. 1.2. Principaux modes simples de déformation :

La fig. 54 représente les principaux états plastiques dans le diagramme  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Par convention,  $\epsilon_1$  représente la plus grande des deux déformations principales et  $\epsilon_2$  la plus petite.

Fig. 54 : états plastiques simples de métaux en feuilles





Dans le domaine correspondant à  $\varepsilon_3 > 0$ , il n'y a pas de courbe limite d'emboutissage puisque le métal s'y épaissit. La courbe limite n'existe qu'entre les droites  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ , cette dernière constituant une asymptote, car elle correspond à une épaisseur constante.

#### IV.1.3. Existence de différentes courbes d'emboutissage :

Il est possible d'obtenir trois courbes limites correspondant à chaque type d'instabilités :

- courbe limite de formage à la striction diffuse,
- courbe limite de formage à la striction locale,
- courbe limite de formage à la rupture.

Les courbes limites à striction diffuse ne sont jamais utilisées. Les courbes limites à striction locale présentent un grand intérêt pratique pour les emboutisseurs, car il est évident qu'aucune striction localisée ne peut être tolérée sur un embouti réel ; mais elles ont un inconvénient important, celui d'être très difficiles à déterminer.

Nous avons choisi de tracer la courbe limite d'emboutissage à la rupture, car l'amorce de rupture est un phénomène bien défini et permet d'obtenir des déformations reproductibles, à condition de respecter quelques conditions :

- la rupture doit être amorcée en pleine tôle et non sur les bords,
- le cercle mesuré doit être situé à l'amorce de rupture,
- l'orientation de l'amorce de rupture par rapport au sens de laminage doit être la même pour l'ensemble des essais.

#### IV.1.4. Intérêt des courbes limites de formage :

Il est intéressant de pouvoir prédire le succès ou l'échec de l'emboutissage d'une pièce avec une tôle donnée et dans des conditions déterminées et c'est possible grâce aux courbes limites d'emboutissage. En effet :

- si par une méthode de calcul on peut prévoir les déformations  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  qui auront lieu dans un embouti, la position du point de coordonnées  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  par rapport à la courbe limite d'emboutissage permet de savoir si l'embouti est réalisable ou non.

- la comparaison des déformations observées sur un embouti réel



avec la courbe limite d'emboutissage permet de savoir si l'embouti est critique ou non. Elle permet d'avoir une idée de la fiabilité de l'opération d'emboutissage.

La courbe limite d'emboutissage représente donc en quelque sorte un critère de qualité pour une tôle et il nous a paru indispensable de connaître celle de l'alliage Zn-Al sur lequel BRANDON [2] avait travaillé.

Il est pratiquement impossible de connaître par le calcul la courbe limite d'un matériau en feuilles à partir de la seule donnée de ses caractéristiques rationnelles  $r$  et  $n$ , car la théorie utilise une définition incomplète du comportement visco-plastique des métaux emboutis [46]. L'emploi d'une méthode expérimentale s'impose.

#### IV.2. Détermination expérimentale de la courbe limite d'emboutissage à rupture du Zn-Al.

##### IV.2.1. Types d'essais utilisés :

Il convient de disposer d'un ensemble d'emboutis ou de types d'éprouvettes dont les zones, où interviendra la rupture, ont des déformations variant de  $\epsilon_2 = -\epsilon_1$  à  $\epsilon_2 = \epsilon_1$ .

Les essais les plus connus sont ceux de NAKAZIMA [47] qui consistent à déformer des éprouvettes rectangulaires de largeurs différentes sur un poinçon hémisphérique.

Mais il est possible d'utiliser les essais les plus diverses [3], [48]:

- essais de traction sur éprouvettes entaillées.
- essais de traction sur éprouvettes larges.
- essais d'expansion hydraulique sur matrice circulaire ou elliptique.
- essai SWIFT.
- essai FUKUI.

Nous avons choisi d'utiliser les essais d'expansion hydraulique, pour lesquels nous possédions tout le matériel expérimental adéquat.



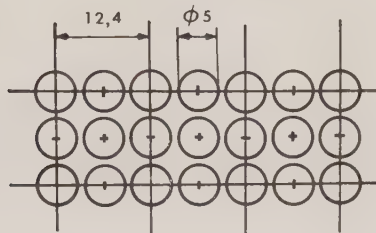
#### IV.2.2. Méthode des réseaux de cercles :

##### \* Principe :

Pour mesurer les déformations, on imprime ou on grave un réseau géométrique sur la surface de la tôle. Ce réseau est entièrement défini par son motif, son pas, sa base. La fig. 55 montre le réseau utilisé.

Le pas est ici de 6,2 mm et la base (diamètre des cercles) de 5 mm.

Fig. 55 : réseau utilisé pour la méthode de mesure des déformations



Rappelons que les déformations rationnelles (somme des déformations  $\frac{dl}{l}$  successives, intervenues entre l'instant  $t_0$  et l'instant  $t$ ) en un point, sont déduites des mesures du grand axe  $l_1$  et du petit axe  $l_2$  de l'ellipse centrée en ce point, par les formules | 34 | (§ II.3.1.).

##### \* Marquage électrolytique :

Des deux procédés de marquage connus, photographique et électrolytique, nous avons choisi le second qui présente l'avantage de résister au frottement (cette propriété nous sera utile pour l'étude du bulging limité au chapitre suivant).

Nous utilisons un appareil EUROMARK type 777. Le déroulement du marquage électrolytique est le suivant :

Après dégraissage soigné de la tôle, on applique une feuille nylon ou grille sur laquelle ont été perforés des trous microscopiques correspondant au dessin du réseau. Un feutre imbibé d'électrolyte est appliqué par dessus. La tôle est reliée à l'un des deux



pôles d'un générateur de courant. Sur le feutre, on applique un rouleau-marqueur relié au second pôle, pendant le temps nécessaire en fonction du marquage et du contraste désiré. On neutralise les marquages avec un chiffon imbibé de neutralyte.

Des traits correspondant au réseau sont creusés sur la tôle.

Le marquage électrolytique présente les qualités suivantes : rapidité de marquage, bonne adhérence, résistance au frottement. Par contre, l'épaisseur du trait (0,25 mm) et son irrégularité nuisent à la précision des mesures.

\* Mesures :

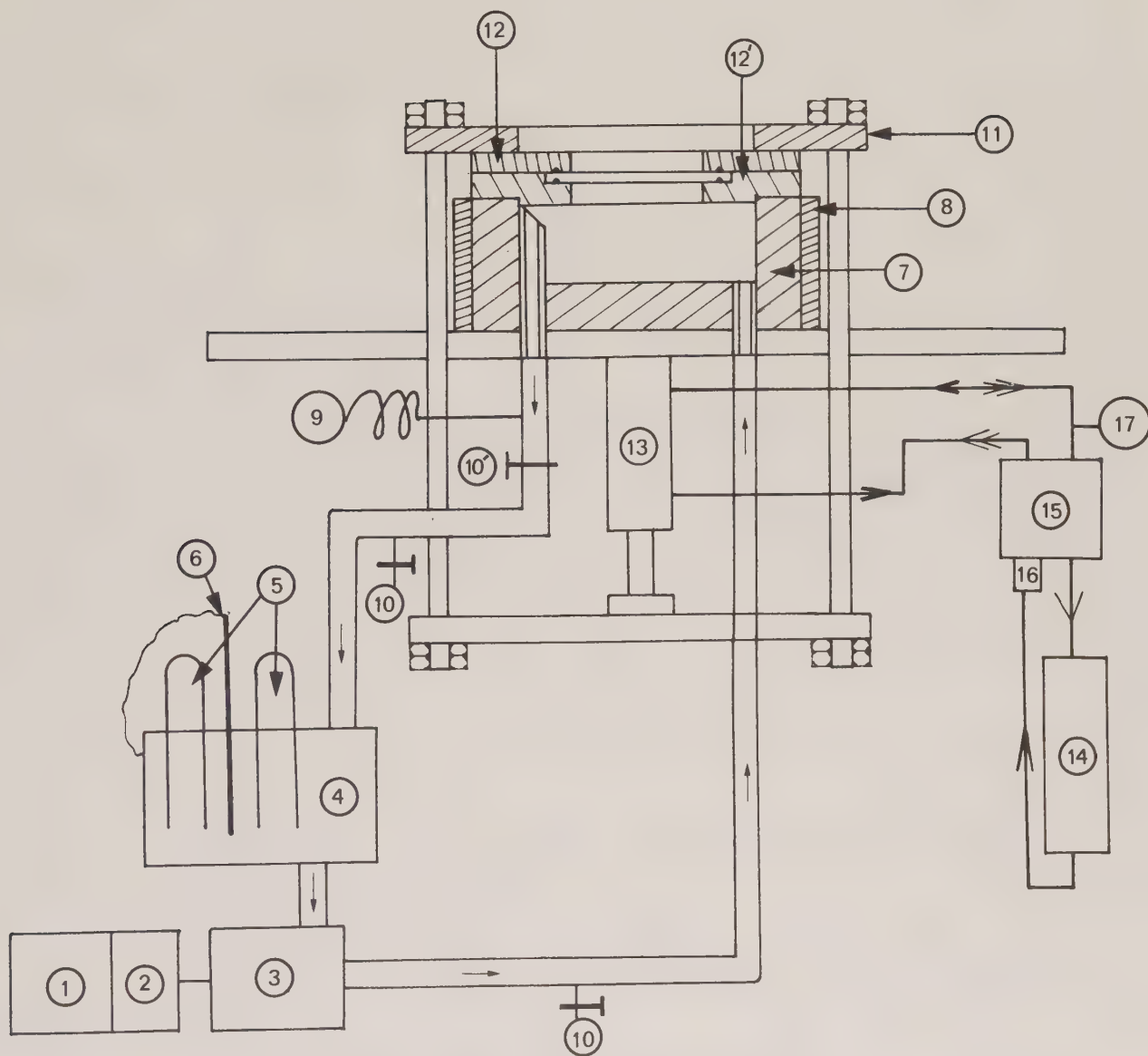
La mesure des déformations est faite à l'aide d'une bande de papier millimétré. On peut estimer l'erreur maximum sur les déformations à  $\Delta\epsilon = \pm 0,02$  pour notre réseau de 5 mm.

IV.2.3. Appareillage expérimental :

Nous avons conçu un dispositif expérimental entièrement nouveau au laboratoire (fig. 56), susceptible de nous permettre de faire tous les essais de formage hydraulique à chaud envisagés : essais de "bulging elliptique" pour le tracé des courbes limites d'emboutissage et essais de bulging limité sur des tôles de diamètre utile 200 mm.



Fig. 56 : Dispositif expérimental



On peut distinguer deux parties essentielles :

- le dispositif de formage proprement dit,
- l'appareillage de commande du serre-flan.



#### IV.2.3.1. Dispositif de formage

Il comprend :

- \* un moteur à courant continu LEROY-SOMER (1) type MVS 100 à vitesse réglable (0 - 2000 tr/mn), de puissance 0,75 kW et de couple 0,37 m kg.

- \* un réducteur LEROY-SOMER (2) accouplé au moteur, ayant un rapport de réduction de 9,7.

- \* une pompe à engrenages (3) de cylindrée  $10 \text{ cm}^3/\text{tr}$  et de pression maximale 100 bars, mue par (2) .

- \* un bain thermostatique (4) SECASI APC 250 RA permettant de réguler la température du fluide.

- \* deux résistances chauffantes (5) destinées à augmenter les possibilités de chauffe de (4) .

- \* une sonde (6) de contrôle de la température.

- \* un pôt (7) de diamètre intérieur 200 mm et extérieur 250 mm.

- \* un ruban chauffant (8) ISOPAD à température variable ( $50^\circ\text{C}$  -  $300^\circ\text{C}$ ) destiné à assurer le maintien en température de (7) .

- \* un manomètre (9) de capacité de mesure 0 - 35 bars, placé à l'extrémité d'un serpentin.

- \* deux robinets de vidange (10) .

- \* une vanne de fermeture du circuit (10').

#### IV.2.3.2. Dispositif de serrage du pourtour de la tôle :

- \* un serre-flan (11) .

- \* deux plaques (12) et (12') possédant un jonc pour bloquer le flan, et percées d'un trou elliptique.

- \* un vérin ENERPAC (13) relié à (11) par trois colonnes.

- \* une pompe à air comprimé (14) ENERPAC PA 133 pour actionner le vérin.

- \* une vanne quatre voies (15) ENERPAC VM4 CB8

- \* un clapet anti-retour (16) .

- \* un manomètre (17) de capacité de mesure 0-450 bars.

- \* l'ensemble fonctionne avec de l'huile hydraulique HF 95 Y ENERPAC.

#### IV.2.3.3. Fluide utilisé pour le formage :

Nous utilisons l'huile minérale THERMESSO 148 de forte viscosité ( $400 \text{ E}$  à  $15^\circ\text{C}$  ;  $1,32 \text{ E}$  à  $200^\circ\text{C}$ ), de densité 0,899, de coefficient de dilatation  $75.10^{-5}$ . Son point éclair est à  $310^\circ\text{C}$ .



Nous avons porté le bain à des températures maximales de 300°C, ce qui permettait d'atteindre une température de plaque d'environ 240°C.

#### IV.2.4. Matériau utilisé :

Le zinc-aluminium 78-22 utilisé pour les essais d'emboutissabilité nous a été fourni par la société "la Vieille Montagne" sous forme de feuilles laminées de 150 mm de large et de 1 m de long. L'épaisseur est de 1 mm.

Il a subi une trempe à l'eau après une chauffe de 2 h à 350°C.

Nous travaillons sur des flans de diamètre 150 mm. Les plaques serre-flan (12) et (12') sont percées de trous allant de l'ellipse 40-100 mm au cercle de diamètre 100 mm.

Les caractéristiques rhéologiques de cet alliage sont données dans la thèse de BRANDON [2] .

#### IV.3. Résultats obtenus :

La courbe limite d'emboutissage à la rupture est donnée sur la fig. 57.

Pour chaque ellipse (40-100 mm, 60-100 mm, 80-100 mm), on a fait deux essais, l'un avec le grand axe de l'ellipse disposé suivant le sens du laminage (a) , l'autre avec le grand axe de l'ellipse disposé perpendiculairement au sens de laminage (b) .

Le cas (a) donne des points expérimentaux ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ) répartis régulièrement sur une courbe.

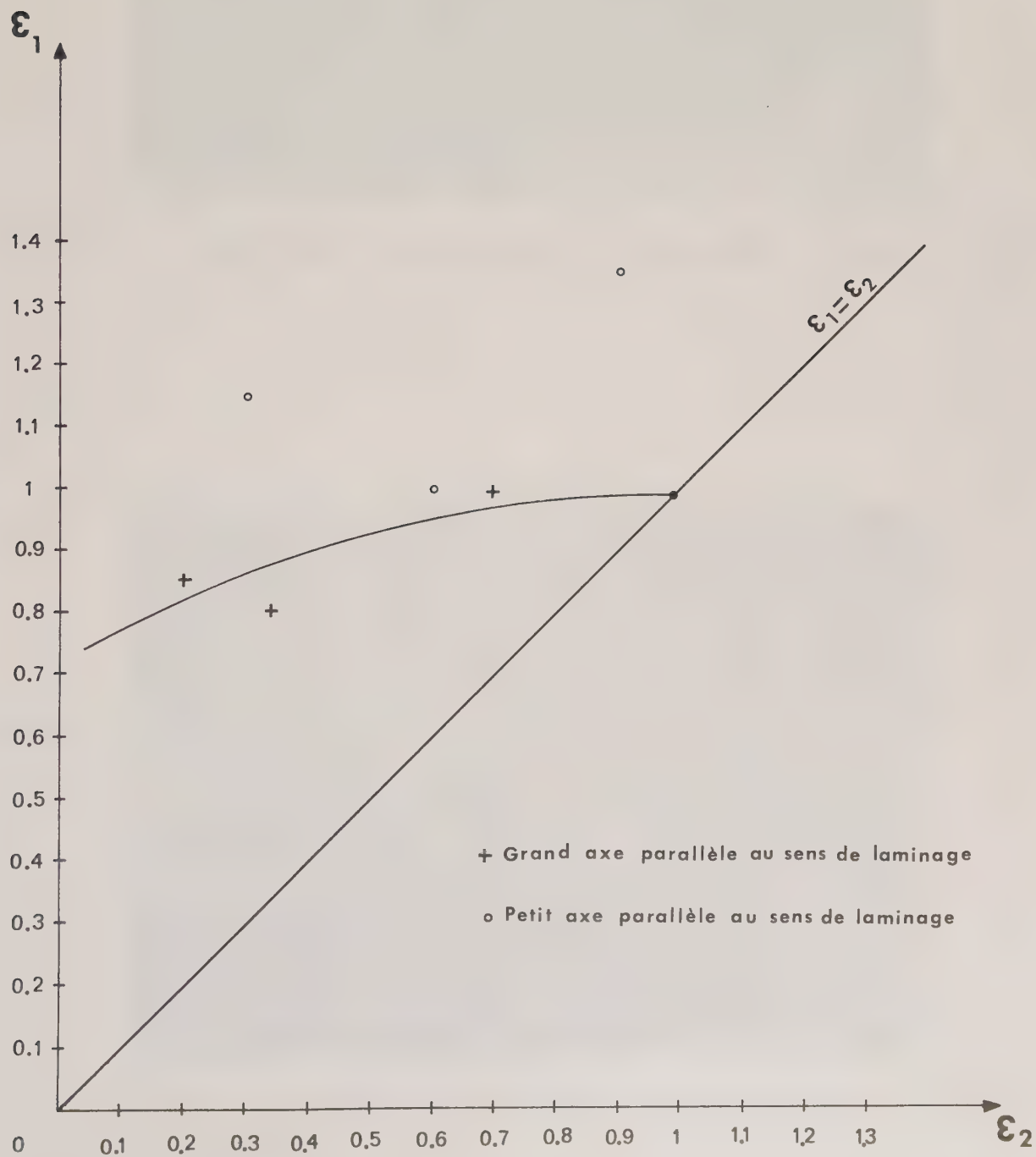
Le cas (b) donne des points très dispersés.

Tous les essais dont le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire au sens de laminage présentent des déformations bien supérieures à ceux du cas (a) , pour une même ellipse, et l'allure des emboutis obtenus est plus galbée.

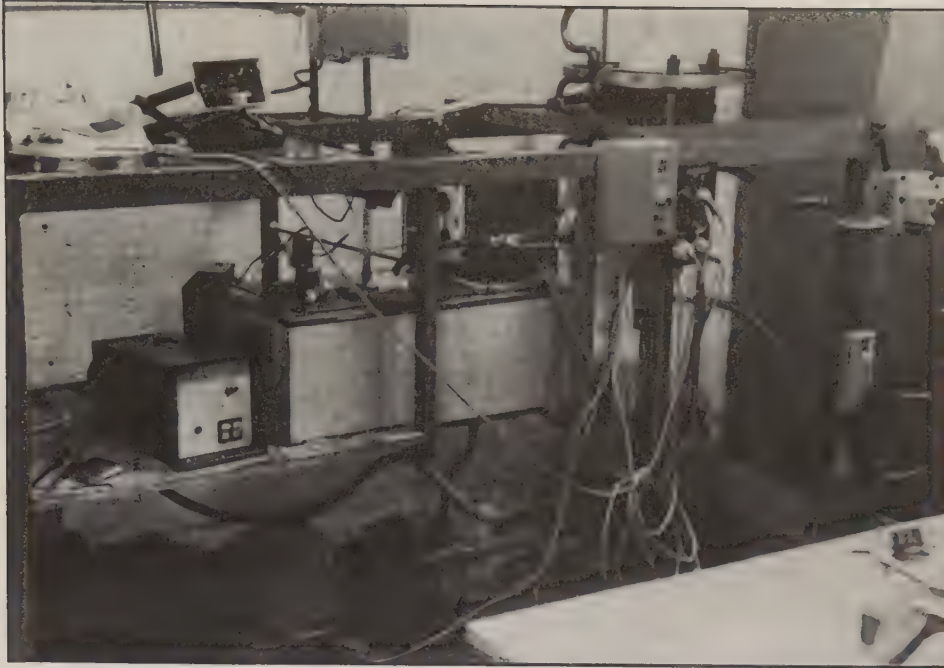
Il faut en conclure que la trempe effectuée sur le matériau n'est pas suffisante pour atténuer la forte anisotropie et que la disposition du sens du laminage est un paramètre important à ne pas négliger pour la réussite d'un embouti.



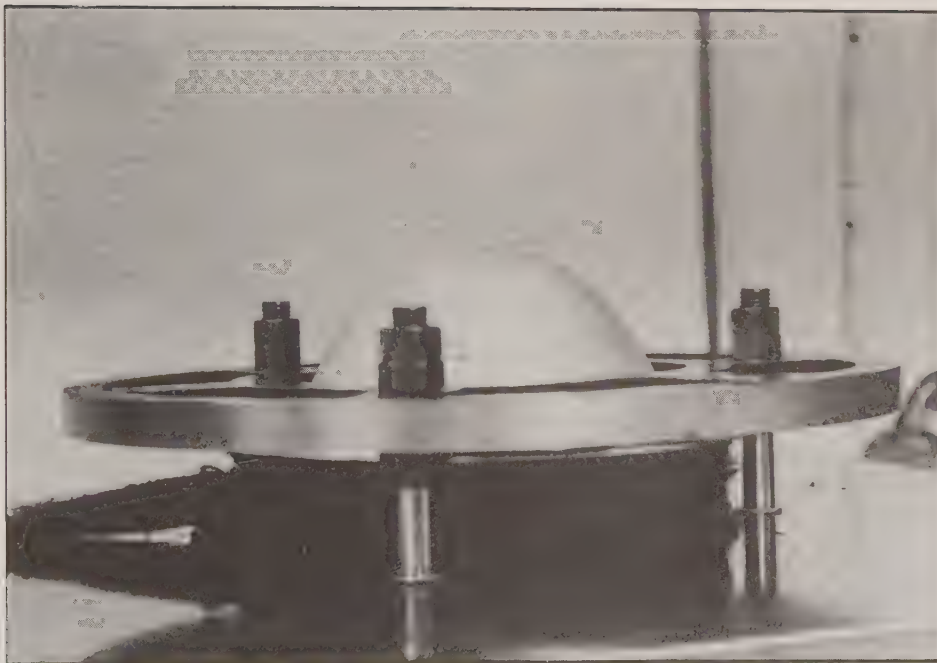
**FIG 57 : COURBE LIMITE D'EMBOUTISSAGE**  
**A RUPTURE DU ZnAl**







**Appareillage expérimental du BULGING à chaud**



**Un BULGING en cours de déformation**



## CHAPITRE V

### - Bulging limité -

#### V.1. Conditions expérimentales :

##### V.1.1. Dispositif expérimental.

Le but des essais est d'obtenir des emboutis cylindriques à fond plat, à l'aide d'une pression hydraulique.

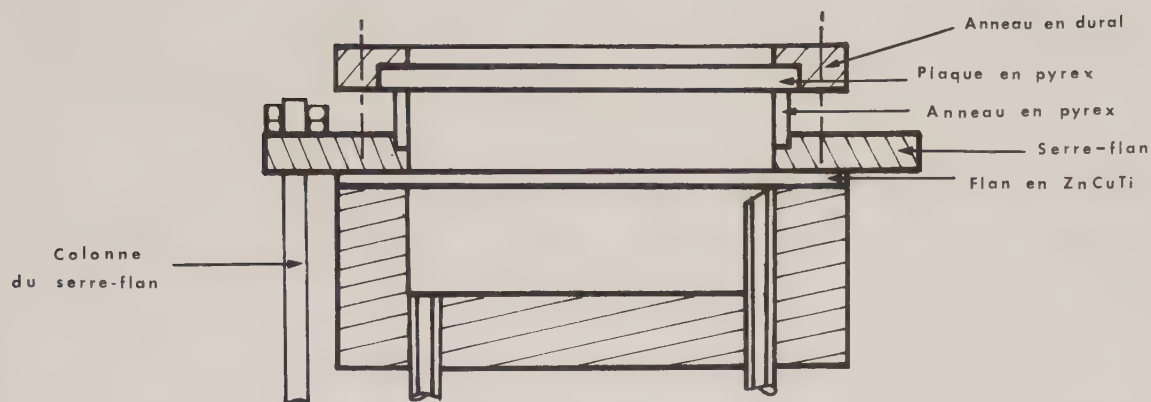
Lorsqu'on laisse la déformation se produire librement, on obtient des pièces de forme sphérique ou elliptique [2]. Il convient donc ici de limiter cette déformation radialement et axialement.

La fig. 58 indique le schéma du montage. On utilise le même dispositif expérimental que pour les essais d'emboutissabilité (fig. 56), mais on enlève les pièces (12) et (12') afin d'avoir un serre-flan circulaire. La bulle est limitée radialement par un anneau en pyrex de diamètre intérieur 200 mm, de hauteur variable, encastré dans le serre-flan, et axialement par une plaque cylindrique en pyrex de diamètre 220 mm et d'épaisseur 20 mm.

La plaque en pyrex est logée dans un anneau en dural fixé sur le serre-flan. L'emploi du pyrex se justifie par la nécessité de visualiser la déformation.



Fig. 58 : Obtention du bulging limité



#### V.1.2. Etat du matériau utilisé :

Pour tous les essais de bulging limité, nous utilisons un alliage de zinc contenant 2 % de cuivre et 1 % de titane. Le matériau nous a été fourni par "la Vieille Montagne" sous forme de bandes laminées d'épaisseur 0,8 mm, de longueur 2 m et de largeur 250 mm. Nous lui avons fait subir une trempe à l'eau après chauffage à 350°C pendant deux heures.

Les flans sont portés à 240°C ( $\pm 3^\circ\text{C}$ ), sauf indication contraire.

L'ensemble plaque en pyrex-anneau en dural est également porté à 250°C, en étuve, avant chaque essai.

#### V.2. Remarques :

##### V.2.1. Absence de glissement :

Il est intéressant de connaître le comportement de la tôle lorsqu'elle entre en contact avec la plaque en pyrex, en particulier de savoir si la matière glisse et continue à se déformer ou bien si elle se bloque.

Pour répondre à cette question, nous avons tracé sur les flans des cercles concentriques à l'aide d'une pointe traçante, et fait graver sur



la plaque en pyrex un réticule gradué. Nous avons constaté que, dès leur contact avec la plaque, les cercles ne bougent plus.

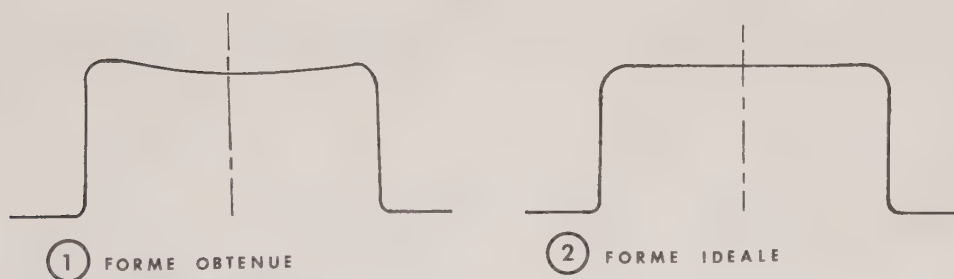
D'autre part, pour une hauteur d'embouti donnée, nous avons mesuré l'épaisseur de la pièce en certains points du "plat" (zone en contact avec la plaque), à différentes étapes de la déformation. Pour chaque rayon  $r$  pris dans le plat, l'épaisseur est rigoureusement la même quel que soit l'état d'avancement de l'embouti.

Ces deux raisons nous permettent d'affirmer qu'il y a absence de glissement de la tôle par rapport à la plaque en pyrex et que la matière se bloque dès son contact avec la plaque.

#### V.2.2. Explication du "creux" de l'embouti :

Nous avons remarqué que chaque embouti présentait un "creux" en son sommet, préjudiciable à son aspect esthétique et éventuellement fonctionnel (fig. 59).

Fig. 59 : Différentes formes d'emboutis



Diverses hypothèses étaient susceptibles de justifier ce phénomène :

- relâchement provoqué par le refroidissement de la pièce,
- existence d'un cisaillement dans l'épaisseur de la tôle due à une déformation différente des surfaces interne et externe de l'embouti,
- vide créé à l'intérieur de l'embouti lors de la vidange.



Nous avons procédé à quelques vérifications pour nous permettre de choisir la bonne hypothèse :

- chauffage en étuve de l'embouti "retourné", puis refroidissement : la forme ne varie pas,
- mesure des cercles concentriques tracés sur les deux faces de la tôle : les diamètres sont égaux, il n'y a pas de cisaillement dans l'épaisseur,
- perçage de l'embouti en son sommet avant de faire la vidange : lors de la vidange, il n'y a pas de relâchement.

La troisième hypothèse est donc la bonne. D'ailleurs, les emboutis que nous avons menés jusqu'à rupture se présentent sous la forme idéale (2), puisqu'il y a une fuite.

Pour remédier à cet inconvénient, il y aurait deux solutions : soit inverser le montage de  $180^\circ$  (le fluide arriverait au-dessus du flan), soit créer un vide partiel sur l'embouti lors de la vidange.

#### V.2.3. Variation de la pression au cours de l'emboutissage :

La pompe à engrenages génératrice de la pression est une pompe de type volumétrique ; nous travaillons donc à débit constant et à pression variable.

Pour le formage d'une "bulle" ordinaire (non limitée), la pression monte de 0 à 5 bars et reste stable à 5 bars tout au long de la déformation, puis elle redescend rapidement à 4 bars juste avant la rupture.

En bulging limité, la pression monte sans interruption jusqu'à ce que se produise la rupture ; la pression de rupture dépend évidemment de la hauteur de l'embouti.

#### V.3. Résultats obtenus :

En emboutissage traditionnel (avec poinçon et matrice), il existe un rayon minimum pour chaque type d'embouti. Nous avons cherché à connaître, en bulging, ce même rayon minimum, pour un diamètre utile de tôle de 200 mm, à différentes profondeurs d'emboutis. Nous avons également étudié l'influence



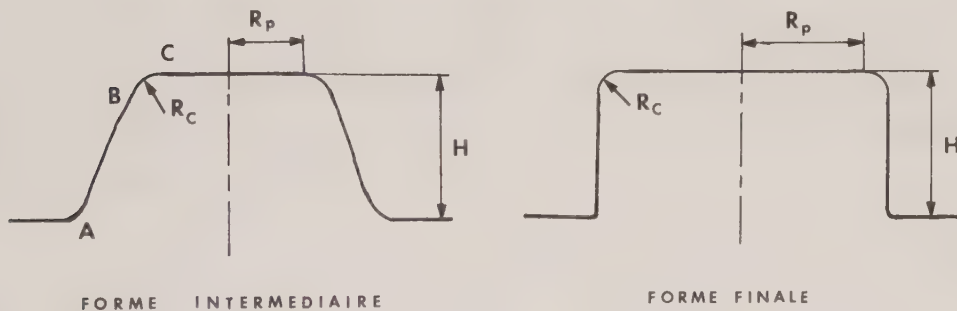
de la température de la plaque, et de la vitesse d'écoulement. Nous dirons enfin quelques mots de l'épaisseur et de la surface développée de la pièce obtenue, toujours en fonction de sa hauteur.

#### V.3.1. Formes de l'embouti en fonction de la pression :

Pour une hauteur  $H$  donnée, la forme de l'embouti dépend de la température, du débit de la pompe et du temps de formage (ou de la pression de travail, puisque ces deux paramètres sont liés). La température, le débit et la hauteur étant fixés, nous avons mesuré, à différents stades de la déformation (c'est-à-dire à différentes pressions), le rayon du plat  $R_p$ , le rayon de courbure  $R_c$  et le temps de formage  $t$  de chaque pièce (fig. 60).

Pour un embouti dont la déformation n'est pas très avancée, le rayon de courbure n'est pas constant tout le long de AC puisque la courbe AC n'est pas un cercle.  $R_c$  désigne alors le plus petit rayon de courbure, mesuré près du plat, dans la zone BC.

Fig. 60 : Définition de  $R_p$  et  $R_c$



Les figures 61 (pour  $H = 50$  mm), 62 (pour  $H = 45$  mm), 63 (pour  $H = 42$  mm) montrent les courbes obtenues en fonction de la pression pour une température de plaque de  $240^\circ\text{C}$  et un débit de  $470\text{ cm}^3/\text{mn}$ . La figure 64 reproduit les conditions de la fig. 61, mais avec un débit supérieur, égal à  $1270\text{ cm}^3/\text{mn}$ .

Sur ces quatre schémas, nous constatons une symétrie assez remarquable des courbes donnant le rayon du plat  $R_p$  et le rayon de courbure  $R_c$ , par rapport à la droite d'équation  $R = 55$  mm.



D'autre part, en ce qui concerne les essais faits à même débit (courbes 61, 62, 63), la tôle entre en contact avec la plaque en pyrex à des pressions identiques (autant que la précision de la lecture du manomètre nous permet d'en juger) pour les différentes hauteurs d'essais, ce qui confirme la remarque faite au § V.2.3..

#### V.3.2. Influence de la hauteur de l'embouti sur le rayon de courbure et sur la pression, avant rupture :

Pour des hauteurs d'embouti variant entre 35 et 50 mm, nous avons essayé de remplir au maximum la "matrice" constituée par l'anneau et la plaque en pyrex (Le pyrex qui, au cours des premiers essais nous avait permis de visualiser la déformation, n'a pas supporté des pressions supérieures à 10 bars et a été remplacé par du dural). Pour chaque essai, nous avons mesuré la pression juste avant rupture et le rayon de courbure obtenu. Les résultats sont donnés fig. 65. Le rayon de courbure minimum augmente avec la hauteur de l'embouti, tandis que la pression diminue. Cela s'explique par la diminution importante de l'épaisseur, qui provoque une rupture prématurée chez les grands emboutis .

Pour  $H = 35$  mm, nous n'avons pas pu atteindre la rupture. Nous étions limités par les possibilités de l'appareillage : la pression de serrage du serre-flan (450 bars) n'était pas suffisante et il se produisait une fuite sous le flan qui limitait la pression de travail à 18 bars.

Pour  $H = 45$  mm, nous avons obtenu une pièce ayant un rayon de 8 mm (inférieur au rayon trouvé pour  $H = 35$  mm). C'est le seul cas où nous avons atteint un rayon si faible. Deux autres essais faits à la même hauteur et dans les mêmes conditions nous ont donné des résultats plus compatibles avec les autres points expérimentaux.

#### V.3.3. Influence de la température de la plaque :

Ayant fixé la hauteur de l'embouti (42 mm), le débit de la pompe ( $470 \text{ cm}^3/\text{mn}$ ) et le temps de déformation (5 mn), on fait varier la température de la plaque et on mesure le rayon de courbure, le rayon du plat et la pression de service de chaque embouti. La fig. 66 donne les résultats obtenus. Les



rayons de courbure  $R_c$  et  $R_p$  varient très peu et toujours de façon symétrique ; la forme obtenue est sensiblement la même dans tous les cas. Par contre, la déformation des plaques à faible température nécessite des pressions de travail plus élevées.

#### V.3.4. Influence de la vitesse d'écoulement :

Nous fixons ici la hauteur de l'embouti (50 mm), la température de la plaque (240°C) et nous déformons les pièces jusqu'à rupture, à différents débits.

Nous mesurons le temps  $t$  de déformation, la pression maximale  $P$  et le rayon de courbure  $R_c$  de chaque pièce obtenue (fig. 67). Le produit  $D.t$  nous donne le volume de l'embouti. Nous constatons que les points expérimentaux donnés pour les deux débits les plus faibles sont pratiquement identiques, à l'exception bien sûr du temps de formage. Pour des débits supérieurs à 470 cm<sup>3</sup>/mn,  $R_c$  augmente tandis que  $P$  et  $V$  diminuent, ce qui signifie que la tôle remplit moins bien le logement qui lui est destiné. La comparaison des courbes 61 et 64 nous conduit d'ailleurs aux mêmes remarques.

Nous en concluons qu'il existe un débit optimal (dans notre cas : 470 cm<sup>3</sup>/mn), qui nous donne la meilleure déformation avec un temps de formage acceptable. La vitesse moyenne de déformation des lieux les plus déformés (ceux où se produit la rupture) est d'environ  $0,9.10^{-1}$ /mn. Les vitesses moyennes de déformation ( $\epsilon/t$ ) sont notées au-dessous des débits.

#### V.3.5. Répartition de l'épaisseur de l'embouti sur un méridien.

Nous mesurons l'épaisseur de la pièce par la méthode des réseaux de cercles. Rappelons que, si  $l_1$  et  $l_2$  sont les longueurs des deux axes de l'ellipse (fig. 23), l'épaisseur au centre de l'ellipse est donnée par (49) tirée de la formule (34) (§ II.3.1.) :

$$e = e_0 \frac{l_0^2}{l_1 l_2} \quad (49)$$

La fig. 68 montre les épaisseurs trouvées grâce à cette méthode pour des emboutis de hauteur 35 à 50 mm, ainsi que l'épaisseur de la pièce de hauteur 50 mm, mesurée au micromètre.



L'étude de ces courbes nous amène plusieurs remarques :

- l'épaisseur calculée par la formule (49) est plus faible que l'épaisseur mesurée au micromètre, mais l'écart entre les deux courbes reste à peu près constant de l'ordre de 0,05 mm. L'erreur provient de la difficulté de mesure de  $l_1$  et  $l_2$  due à l'épaisseur du trait. Cependant, la mesure est répétitive à condition qu'elle soit faite par le même opérateur. La méthode des réseaux de cercles est donc parfaitement valable pour mesurer l'épaisseur, puisqu'on connaît l'écart avec la valeur "réelle". Elle est de beaucoup préférable à la mesure au micromètre, qui nécessite le sciage de la pièce suivant un méridien.
- l'épaisseur de la pièce est plus faible pour les emboutis de grande hauteur, mais elle varie moins vite que pour les petits emboutis (écart entre la valeur la plus forte et la plus faible : 0,18 mm pour  $H = 50$  mm, 0,33 mm pour  $H = 35$  mm). Ceci s'explique par le fait que les pièces hautes ont vu leur épaisseur au centre diminuer beaucoup avant d'entrer en contact avec l'écran, ce qui compense un peu l'énorme diminution d'épaisseur de l'extérieur du plat qui se produit en fin d'essai lorsque la matière est tirée vers l'extérieur pour venir combler le rayon au mieux.
- sur la fig. 68, on a également tracé la courbe qui indique le rayon du plat pour chaque pièce. On constate que le minimum d'épaisseur pour chaque hauteur ne se situe pas toujours au même endroit par rapport à ce rayon limite. Le minimum se trouve exactement à la limite du plat pour la pièce la plus haute. Ensuite, le minimum s'éloigne de cette limite lorsqu'on diminue la hauteur de la pièce. Pour la pièce de hauteur 35 mm, l'épaisseur présente un minimum très accentué sur le plat à environ 10 mm du rayon limite du plat, ce qui signifie que l'hypothèse donnée au § V.2.1. de blocage de la matière lors du contact n'est plus vérifiée : le rayon, compte tenu de l'épaisseur de la matière à cet endroit, a atteint son minimum ; il n'est plus possible de "dérouler" la tôle ; la pression de l'huile augmente fortement et "tire" sur la matière déjà en contact avec l'écran, ce qui explique l'importante diminution de l'épaisseur et donne à la pièce une surface irrégulière.
- toutes les courbes données ont été tracées au moyen de mesures faites sur un méridien parallèle au sens de laminage. Nous avons effectué quelques mesures sur un méridien perpendiculaire au sens de laminage. L'épaisseur trouvée est alors légèrement inférieure : l'écart va de 0 mm (au centre) à 0,03 mm (à la



limite du plat). Ce qui prouve l'anisotropie de la tôle.

En résumé :

Les deux qualités essentielles d'un embouti étant, à notre avis, une épaisseur sensiblement constante et un rayon de courbure faible, il apparaît indispensable de faire un compromis afin de déterminer la hauteur la plus favorable en examinant les courbes 65 et 68. Une hauteur comprise entre 40 et 45 mm (soit un rapport hauteur/diamètre de 0,2 à 0,225), pour une tôle en Zn-Cu-Ti d'épaisseur 0,8 mm, semble donner les meilleurs résultats compte tenu du compromis évoqué.

Comme, en général, la forme de l'embouti est imposée, il y aura des cas où le bulging par expansion conviendra et d'autres cas où il faudra utiliser le rétreint.

#### V.3.6. Calcul de la surface développée :

LIANG BING-WEN [49] a mis au point une formule générale permettant de calculer la surface de révolution d'un embouti.

$$S = 2 \pi (\sum x l + \sum (\pm r^2)) \quad (50)$$

$\sum x l$  couvre tous les éléments droits et courbes

$\sum (\pm r^2)$  est une correction pour les arcs seulement

$l$  est la longueur d'un élément

$r$  est le rayon d'une courbe

Pour une ligne droite,  $x$  est la distance du centre de gravité à l'axe de révolution.

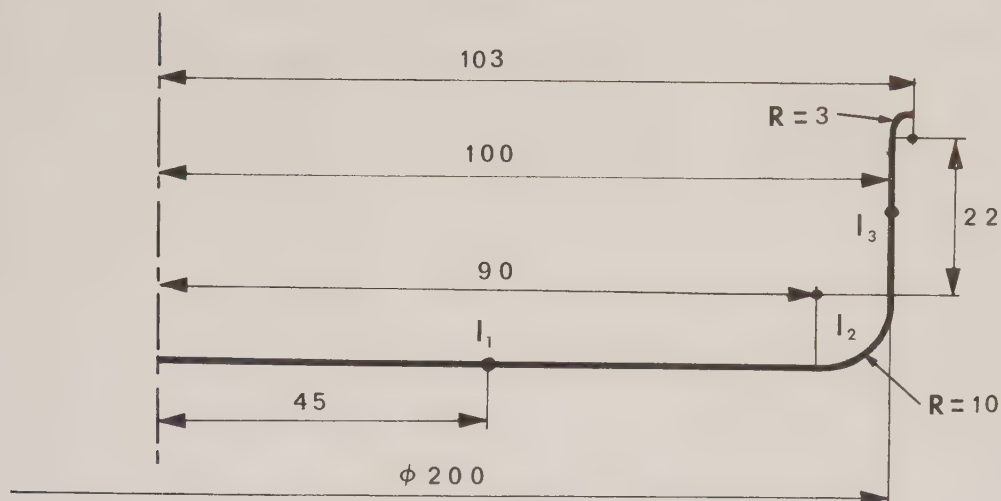
Pour un arc,  $x$  est la distance du centre de l'arc à l'axe de révolution.

Si l'arc est convexe (0 à l'intérieur de l'arc relativement à  $z z'$ ), le signe est +. Si l'arc est concave (0 à l'extérieur), le signe est -.

Un exemple de calcul (pour  $H = 35$  mm) est donné sur la fig. 69.



Fig. 69 : Calcul de la surface développée de l'embouti



$$S = 2\pi \left( 45 \cdot 90 + 90 \cdot \left( 10 \frac{\pi}{2} \right) + 100 \cdot 22 + 103 \cdot \left( 3 \frac{\pi}{2} \right) + 10^2 - 3^2 \right) = 51\,747,7 \text{ mm}^2$$

La surface initiale  $S_0$  du flan ( $\phi 206 \text{ mm}$ ) étant égale à  $33\,329 \text{ mm}^2$ , cela donne un rapport  $S/S_0$  de 1,55.

La fig. 70 donne les courbes décrites par  $S$  et  $S/S_0$  en fonction de la hauteur  $H$  de l'embouti.

On constate que la surface développée croît logiquement avec la hauteur de l'embouti, puis se stabilise. Cela prouve que la hauteur maximale, pour un diamètre et une épaisseur de flan donnés, a été atteinte. Des tentatives d'emboutissage plus profond conduiraient à un échec (rupture avant remplissage de la matrice).

#### V.3.7. Conclusion sur le bulging limité :

Nous avons tracé un certain nombre de courbes relatives aux caractéristiques géométriques des emboutis obtenus, en fonction de divers paramètres. Les résultats ne sont pas aussi prometteurs que nous l'espérions et ceci est dû à la nature du matériau utilisé.



Nous souhaitions faire les essais de bulging limité sur le Zn-Al, mais à la suite d'une erreur, la "Vieille Montagne" nous a livré un alliage de zinc contenant du cuivre et du titane, et, à cause des délais de livraisons trop longs et du temps qui nous était imparti, nous avons été contraints d'utiliser ce matériau qui n'est pas un superplastique.



FIG 61: BULGING LIMITE A 50 mm

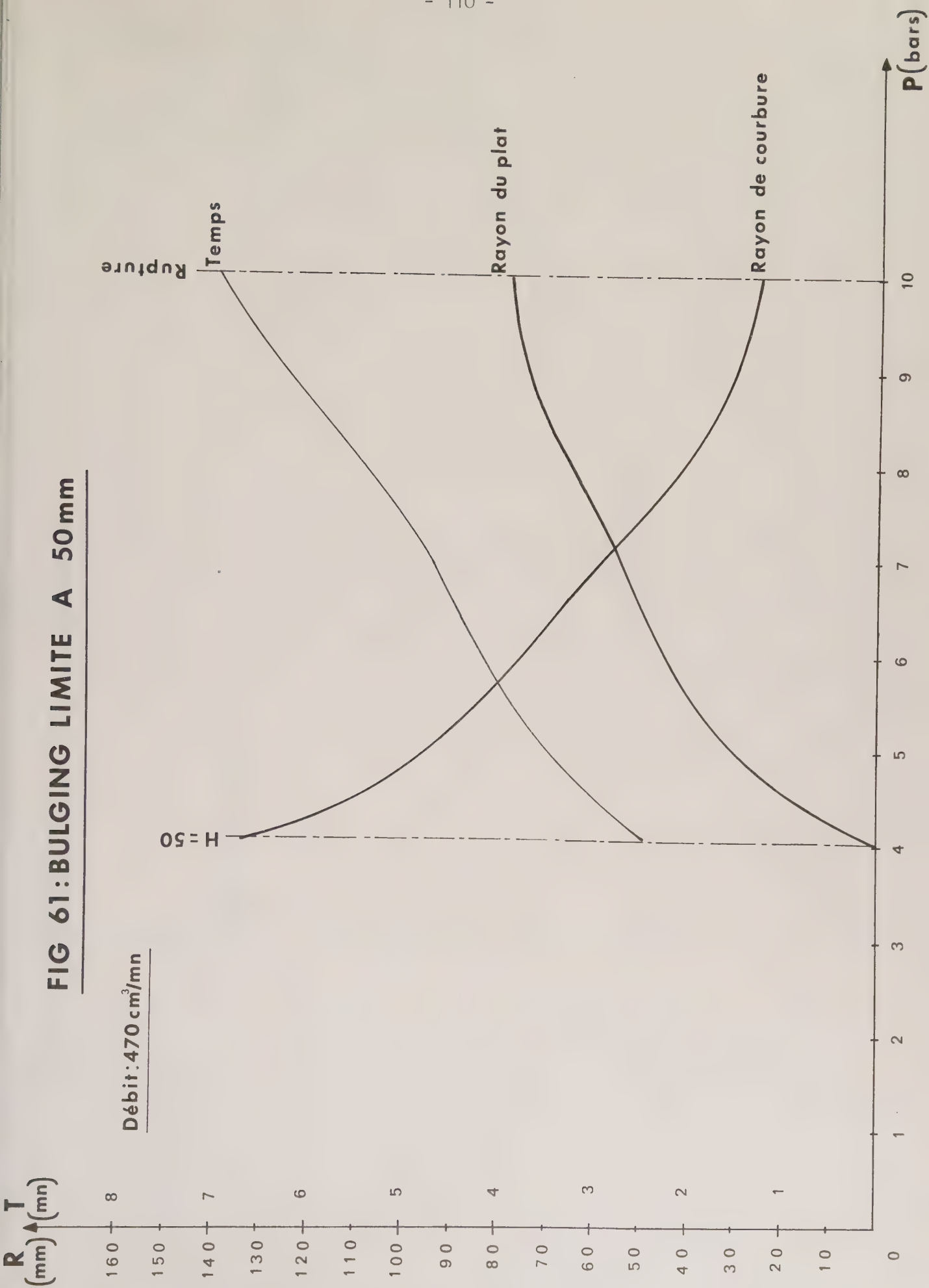
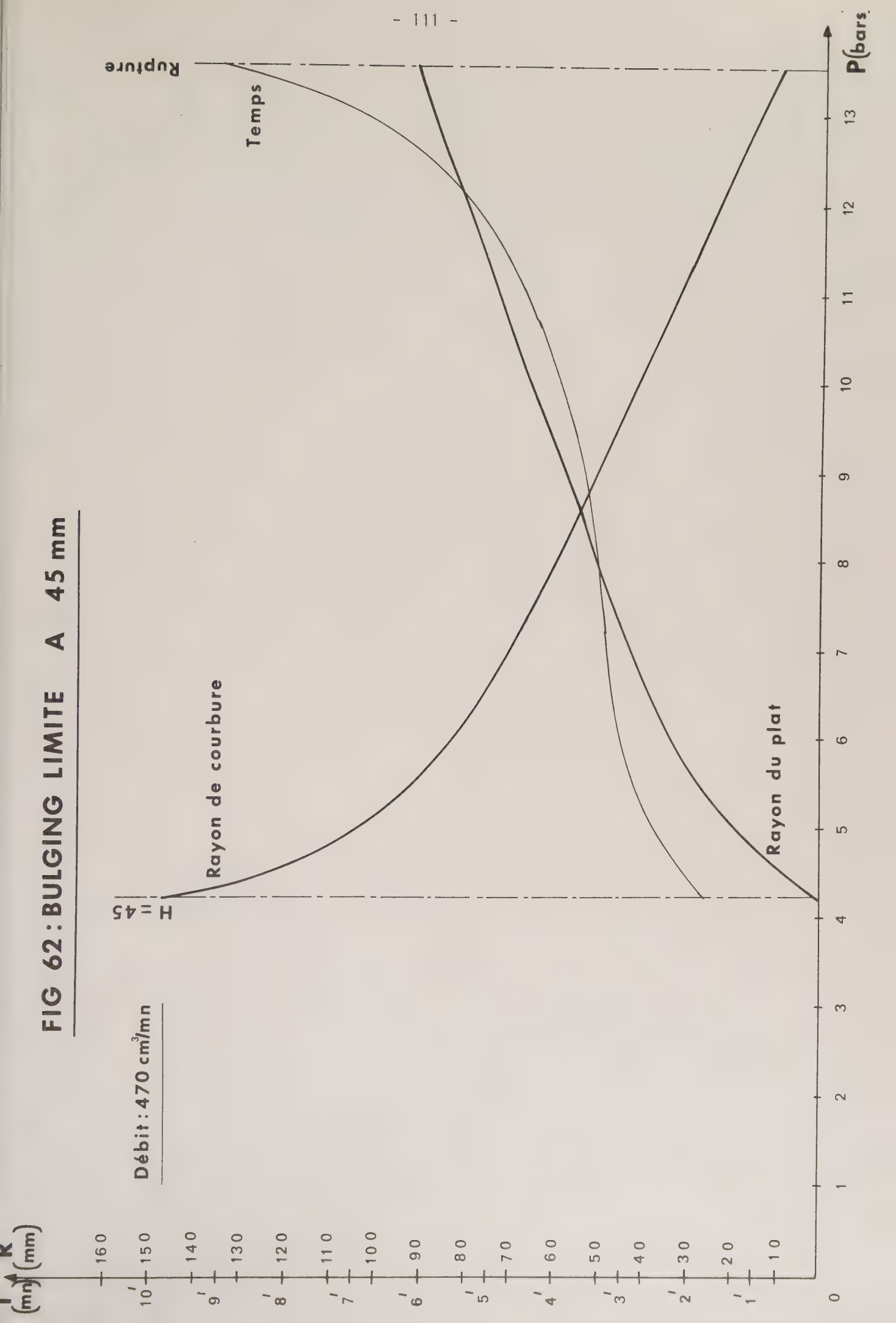




FIG 62: BULGING LIMITE A 45 mm





$R$   
(mm)

$T$   
(mn)

FIG 63: BULGING LIMITE A 42 mm

Débit: 470 cm<sup>3</sup>/mn

150 + 15  
140 + 14  
130 + 13  
120 + 12  
110 + 11  
100 + 10  
90 + 9  
80 + 8  
70 + 7  
60 + 6  
50 + 5  
40 + 4  
30 + 3  
20 + 2  
10 + 1  
0

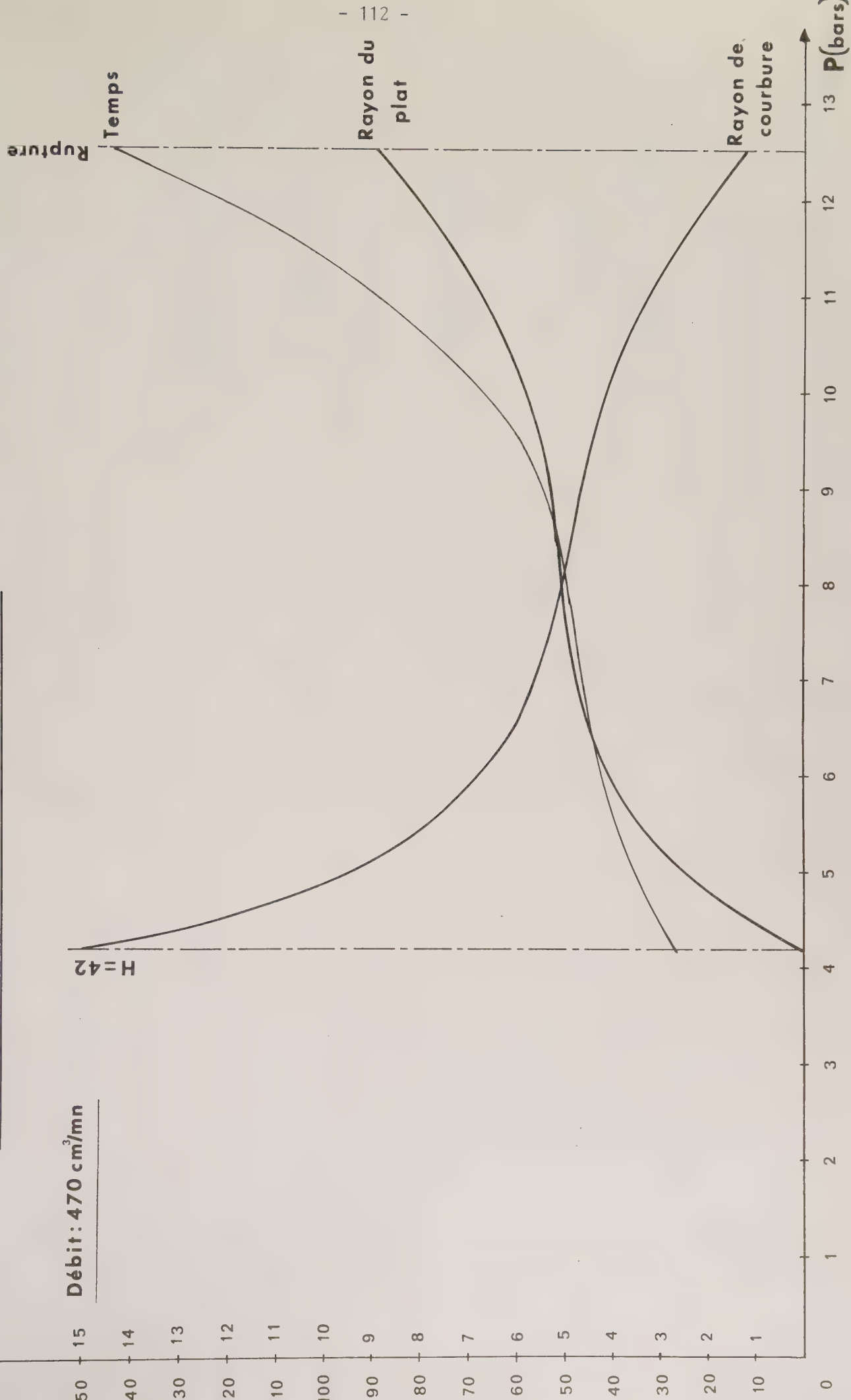
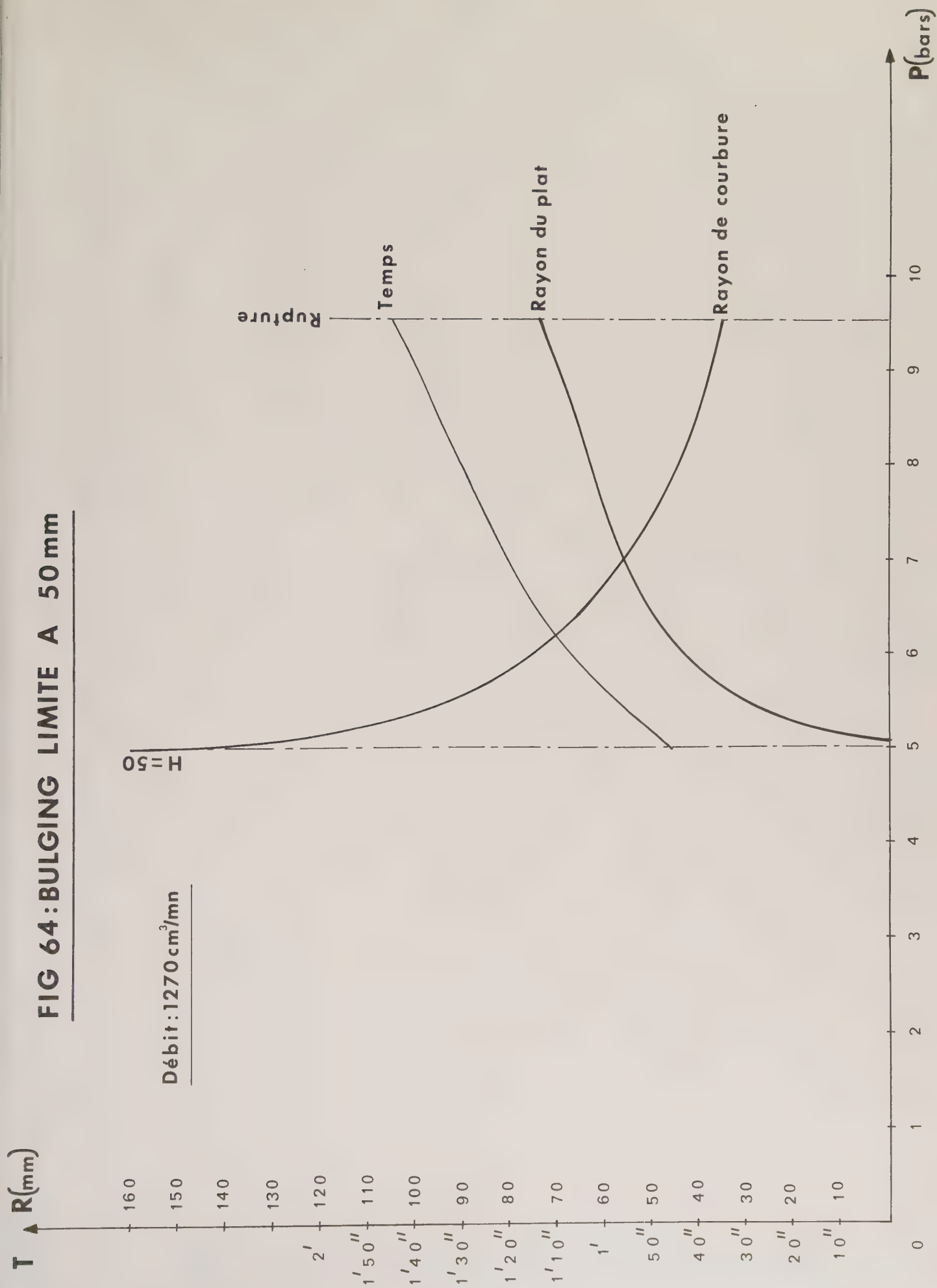




FIG 64: BULGING LIMITE A 50 mm





**FIG 65: INFLUENCE DE LA HAUTEUR DE L'EMBOUTI**

Débit : 470 cm<sup>3</sup>/mn

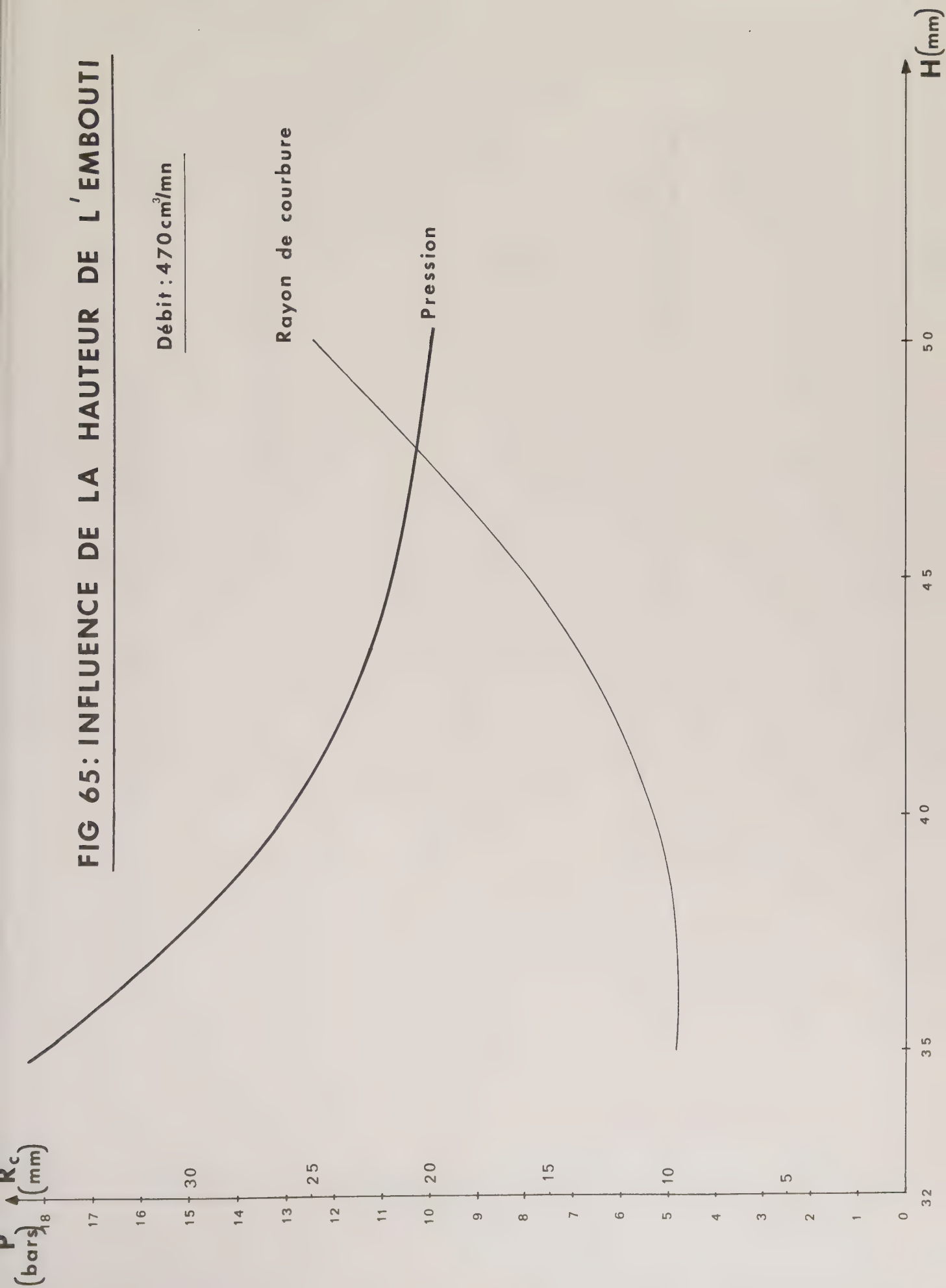
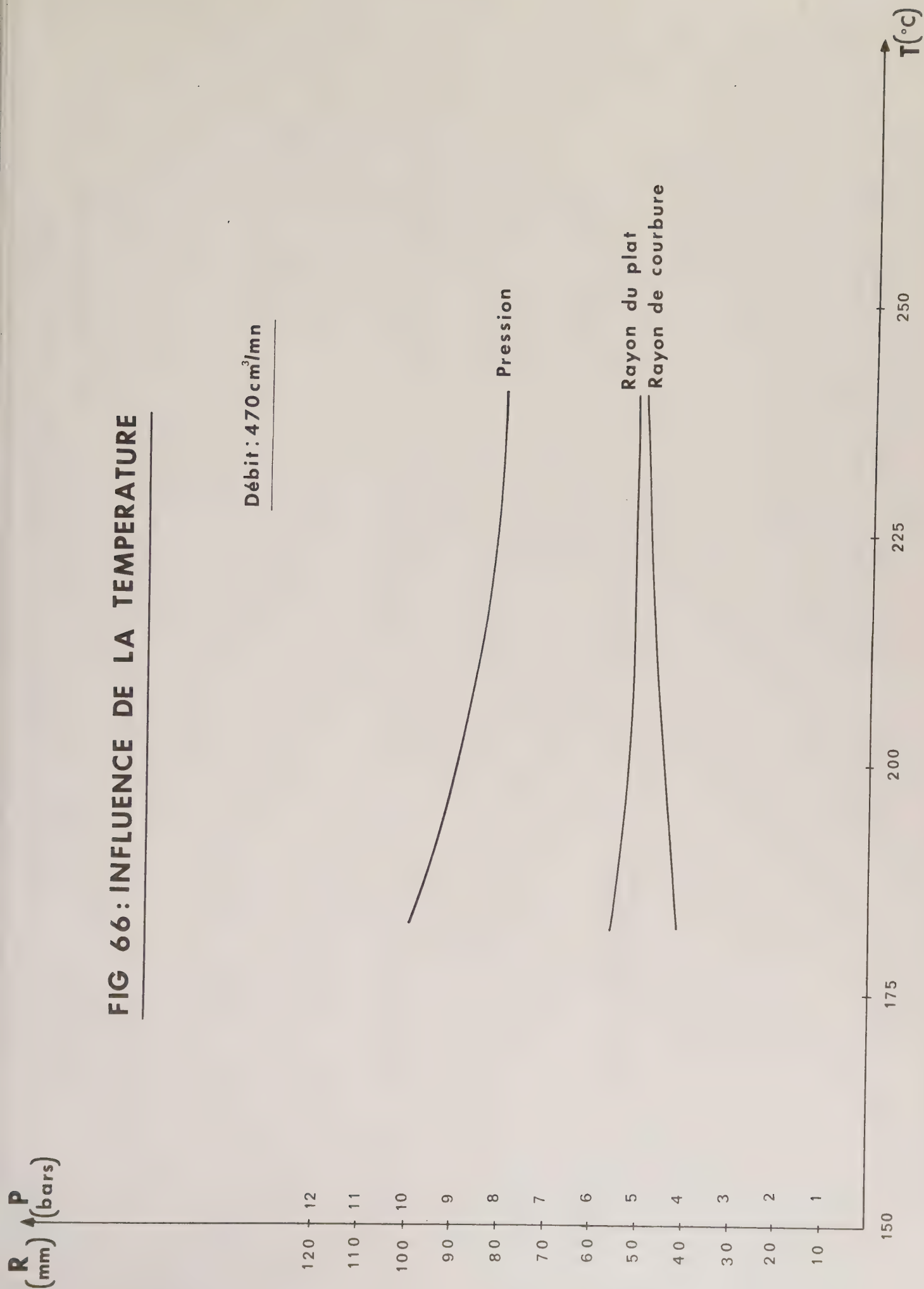




FIG 66: INFLUENCE DE LA TEMPERATURE





**FIG 67 : INFLUENCE DU DEBIT (OU DE LA VITESSE  
DE DEFORMATION )**

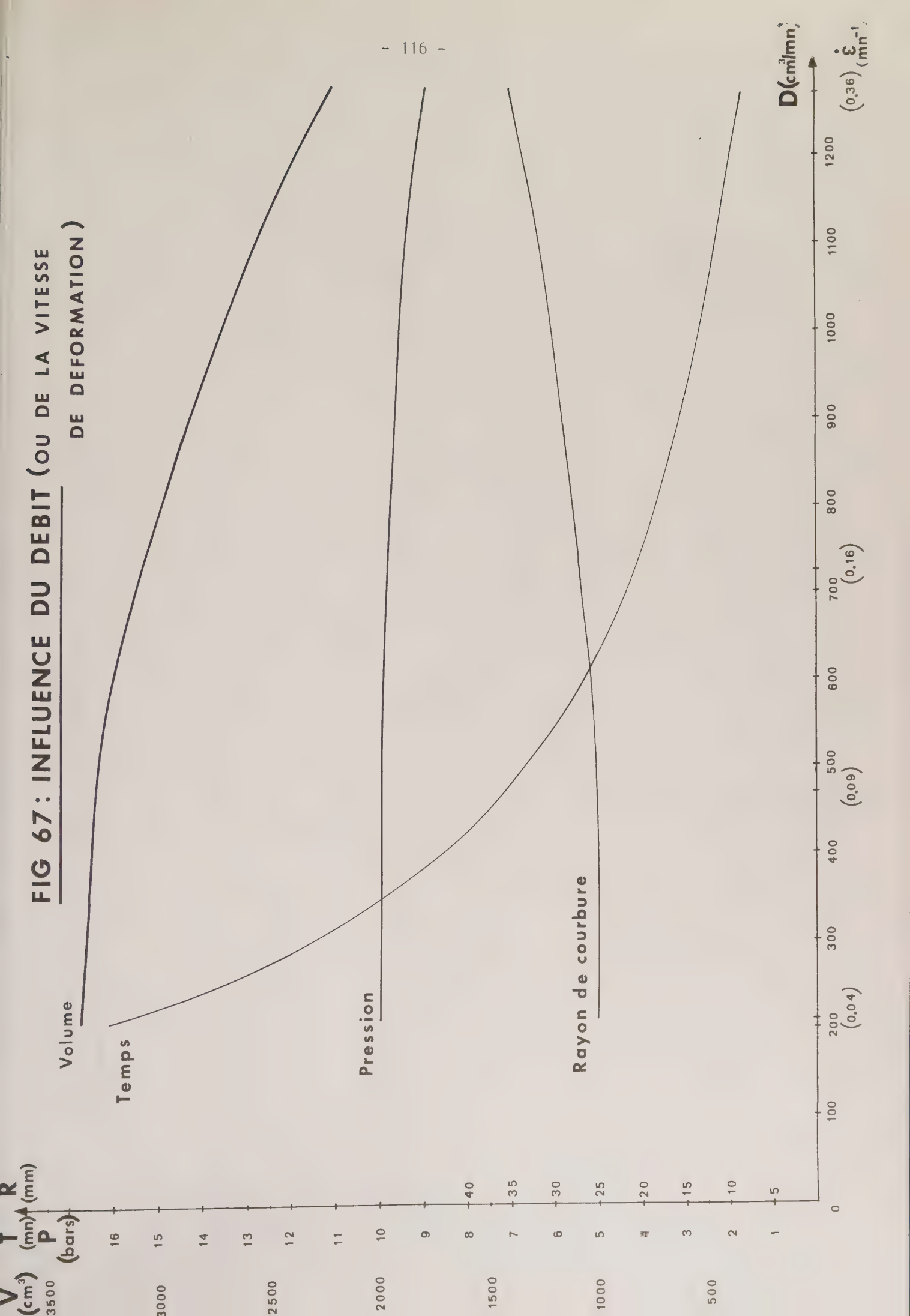




FIG 68: EPAISSEUR DE LA TRANCHE

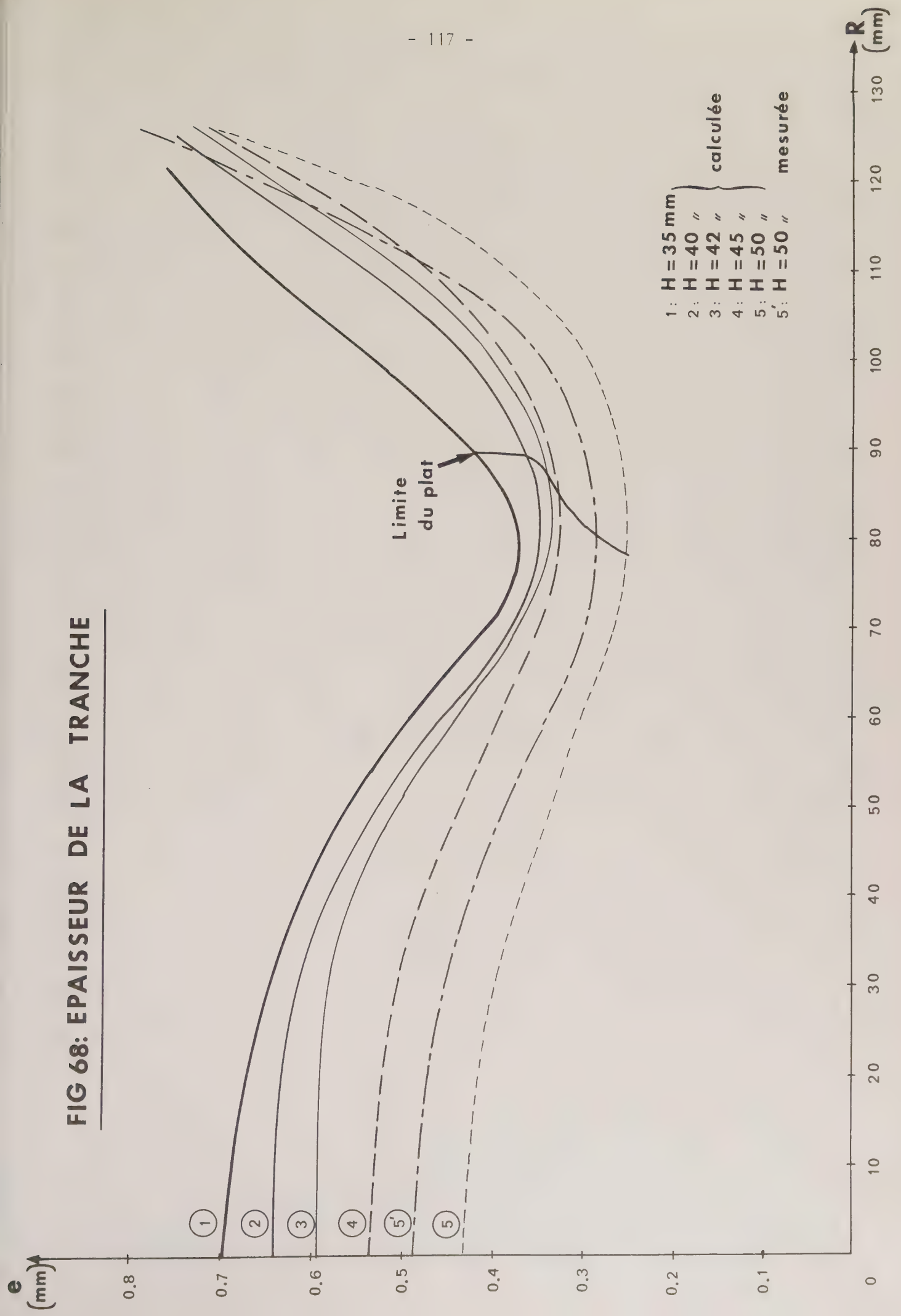




FIG 70: SURFACE DEVELOPEE en fonction de la hauteur de l'embouti

$S \rightarrow S/S_0$   
( $\text{cm}^2$ )

580 — 1.8

570 — 1.7

560 — 1.6

550 — 1.5

540 — 1.4

530 — 1.3

520 — 1.2

510 — 1.1

500 — 1

25

30

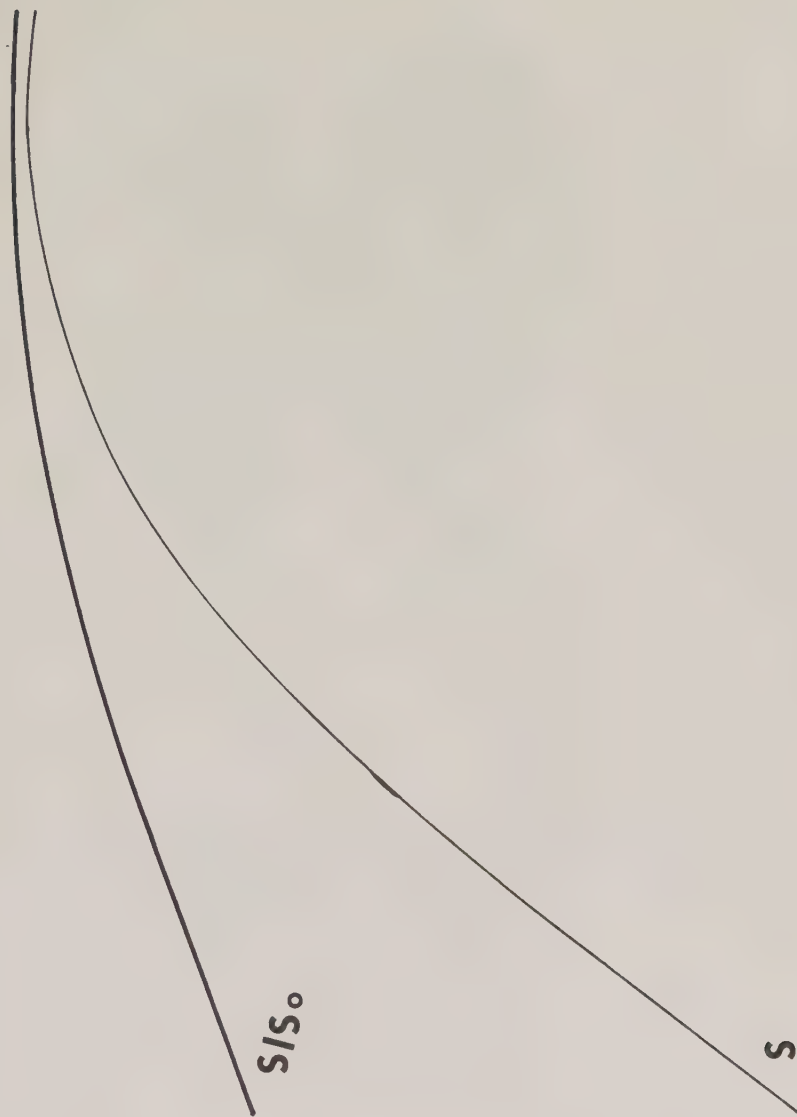
35

40

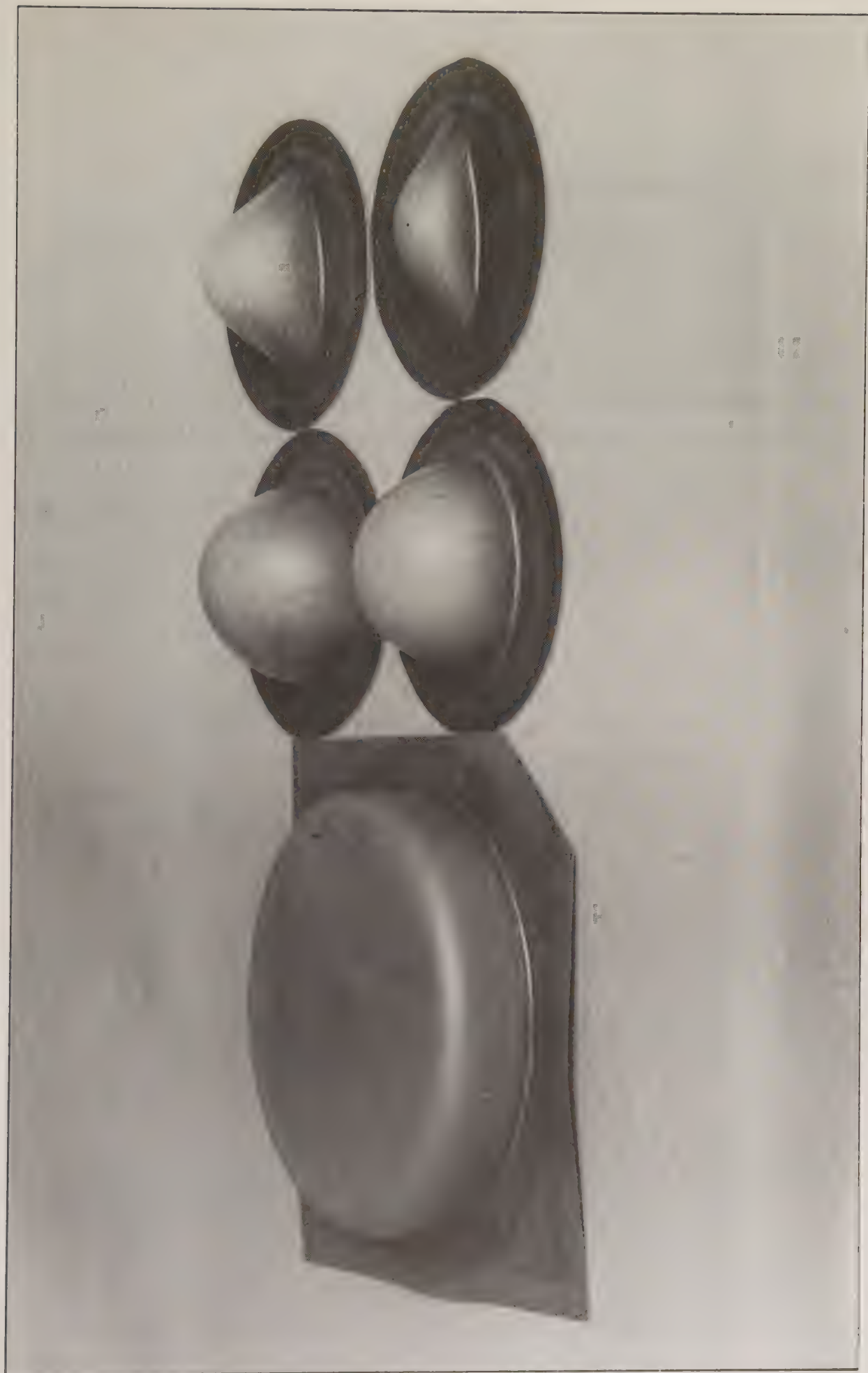
45

50

$H$   
(mm)









## CONCLUSION

-----

Le travail qui nous a été confié, étant une extension de la thèse de BRANDON, a été scindé en deux domaines bien distincts : étude théorique et expérimentale du bulging à froid, divers essais d'emboutissage hydraulique à chaud.

Dans le cas du bulging à froid, une méthode de calcul de la déformation par expansion d'une plaque circulaire a été mise au point, qui donne des résultats en accord avec ceux fournis par les essais expérimentaux. Il serait intéressant de compléter ces travaux par l'étude de la rupture ductile des matériaux, afin de pouvoir introduire un critère de rupture dans les calculs. Nous avons également considéré le cas de la déformation avec rétreint, mais ici, les hypothèses du calcul ne coïncidaient pas parfaitement avec les essais puisque le rétreint était impossible lorsque nous travaillions en déformation plane.

En ce qui concerne le bulging à chaud, nous avons tracé la courbe limite d'emboutissage de l'alliage superplastique Zn-Al utilisé par BRANDON, courbe qui nous permet de connaître l'aptitude à l'emboutissage de ce matériau. Nous avons effectué les essais de bulging limité sur l'alliage Zn-Cu-Ti, livré par erreur à la place du Zn-Al. Nous avons mesuré les caractéristiques des emboutis obtenus en fonction de divers paramètres. Il est évident que l'influence de la température par exemple aurait été plus notoire sur le Zn-Al.

Pour terminer, nous voudrions souligner l'intérêt du formage par pression hydrostatique qui nécessite un matériel d'emboutissage simple (pas de presse, ni de poinçon). L'existence, au Laboratoire de Mécanique Appliquée, de l'appareillage expérimental pourrait permettre de refaire les mêmes essais de bulging limité avec le Zn-Al qui donnerait des résultats certainement plus exploitables.

Il serait intéressant de tenter d'obtenir d'autres types de pièces en faisant varier la forme de la matrice et également d'utiliser le rétreint à chaud afin d'obtenir des emboutis plus profonds.



B I B L I O G R A P H I E

-----

- 1 - J.F. BRANDON -

Etude théorique d'un procédé de formage applicable aux matériaux viscoélastiques. Applications aux alliages superplastiques. Diplôme d'études approfondies.  
Besançon - Septembre 1976.

- 2 - J.F. BRANDON -

Contribution à l'étude théorique et expérimentale de la déformation visqueuse des coques minces de révolution. Applications aux matériaux superplastiques.  
Thèse de 3ème cycle. Besançon - Juin 1978.

- 3 - G. POMEY -

Aptitude à l'emboutissage des tôles minces. Tomes 1-2-3.  
Collection IRSID - OTUA.

- 4 - A. FERRON, R. MARTIN, J.B. VOISIN -

Méthode des réseaux de cercles. Principe, applications à l'emboutissage.  
Les mémoires techniques du CETIM. n° 28 - Décembre 1976.

- 5 - C. JOVIGNOT -

Revue de métallurgie - 1930.

- 6 - H. GOUGH, G. HANKINS -

The institute of automobile Engineers.  
Londres - 1935.

- 7 - A. GLEYSAL -

Plastic deformation of a circular diaphragm under pressure  
Journal of Applied mechanics - 1948.

- 8 - R. HILL -

A theory of the plastic bulging of a metal diaphragm by lateral pressure.  
Metal flow Research Laboratory. Vol. 41. N° 322 -  
Novembre 1950.

- 9 - D.M. WOO -

The analysis of axisymmetric forming of sheet metal and the hydrostatic bulging process.  
Int. J. Mec. Sci. Pergamon Press - Vol. 6 - 1964.



- 10 - B. STORÄKERS -  
Finite plastic deformation of a circular membrane under hydrostatic pressure.  
Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press - Vol. 8 - 1966.
- 11 - N.A. NEIL, W.R. NEWMARK -  
Large plastic deformations of circular membranes.  
Journal of applied mechanics. T. 22 - 1955.
- 12 - P. HART LEY, C.E.N. STURGESS, G.W. ROWE -  
Friction in finite-element analyses of metalforming processes.  
Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press - Vol. 21 - 1979.
- 13 - O.C. ZIENKIEWICZ, E. ONATE -  
Finite element solution of some problems of metal forming using the plastic flow approach.  
Congrès : méthodes numériques dans les sciences de l'ingénieur. PARIS - 1978.
- 14 - M. GOTOH, F. ISHISE -  
A finite element analysis of rigid-plastic deformation of the flange in a deep-drawing process based on a fourth-degree yield function.  
Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press - Vol. 20 - 1978.
- 15 - A. GRILL, K. SCHWERDTFEGER -  
Finite element analysis of bulging produced by creep in continuously cast steel slabs.  
Ironmaking and Steelmaking - n° 3 - 1979.
- 16 - S. LEVY, C.F. SHIH, J.P.D. WILKINSON, P. STINE, R.C.Mc. WILSON -  
Analysis of sheet metal forming to axisymmetric shapes. Formability topics. Metallic Materials - 1978.
- 17 - L. LECORNU -  
Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles.  
Thèse Sciences - Mathématiques - Paris - 1880.
- 18 - A. CEMAL ERINGEN, ERDOGAN S. SUHUBI -  
Elastodynamics, volume I.  
Academic Press - New York and London - 1974.
- 19 - P. BAQUE, E. FELDER, J. HYAFIL, Y. DESCARTHA -  
Mise en forme des métaux. Calcul par la plasticité.  
Dunod - Paris - 1973 - Tome 1.
- 20 - A.A. ILIOUCHINE -  
Plasticité - Déformations élasto-plastiques.  
Eyrolles - Paris - 1956.



- 21 - J. MANDEL -  
Propriétés mécaniques des matériaux.  
Eyrolles - Paris - 1978.
- 22 - A. FERRON, R. MARTIN, L. PAPAIZIAN -  
Propriétés plastiques des métaux en feuilles.  
Les mémoires techniques du CETIM.  
n° 23 - Septembre 1975.
- 23 - TIMOSHENKO -  
Théorie des plaques et des coques. Paris-Liège - 1961.
- 24 - A. GLEYSAL -  
Plastic deformation of a circular diaphragm under  
pressure. Journal of applied mechanics - 1948.
- 25 - M. JAOUL -  
Etude de la plasticité et application aux métaux.  
Dunod - Paris - 1965 -
- 26 - C.W. RICHARDS -  
La science des matériaux de l'ingénieur.  
Dunod - Paris - 1965.
- 27 - P. BARRAND, R. GADEAU -  
L'aluminium.  
Péchiney - Eyrolles.
- 28 - G. LEMASSON, L. BLAIN -  
Matériaux de construction mécanique et électrique.  
Dunod.
- 29 - Centre d'information cuivre laitons alliages -  
Les laitons - Riegel éditeur.
- 30 - GERARD DE SMET -  
La pratique des traitements thermiques des métaux industriels.  
Dunod - Paris - 1963.
- 31 - J.P. KEELER -  
Circular Grid System. A valuable aid for evaluating  
sheet-metal formability.  
Sheet-metal industries, vol. 45 - n° 497 - 1968.
- 32 - D.R. PALMER -  
Electrochemical marking of grids in autobody press working.  
Sheet metal industries, vol. 45, n° 491 - 1968.
- 33 - R. PEARCE, I.C. DRINKWATER -  
Some aspects of electrochemical marking.  
Sheet metal industries, vol. 45, n° 498 - 1968.



34 - R. HILL -

The mathematical theory of plasticity.  
Oxford - At the Clarendon Press.

35 - B. DESSUS, M. LEBLANC -

The fringe method and its application to the measurement  
of deformations, vibrations, contour lines and differences  
of objects.  
Opto-electronics 5 - 1973.

36 - B. DESSUS, J.P. GERARDIN, P. MOUSSELET -

Une méthode des franges en temps réel et ses applications  
industrielles : déformations, vibrations, courbes de ni-  
veau.  
Optical and Quantum Electronics 7 - 1975.

37 - H. TAKASAKI -

Moiré topography.  
Applied Optics - vol. 9 - n° 6 - 1970.

38 - P. BENOIT, E. MATHIEU, J. HORMIERE, A. THOMAS -

Characterization and control of threedimensional objects  
using fringe projection techniques.  
Nouvelle revue optique - t. 6 - n° 2 - 1975.

39 - D. RAULT -

Description de l'emboutissage et problèmes posés.  
Ecole d'été de métallurgie physique de Villars sur Ollon.  
Septembre 1975 - Editions du C.N.R.S.

40 - P. BAQUE, E. FELDER, J. HYAFIL, Y. DESCATHA -

Mise en forme des métaux - Calcul par la plasticité.  
Dunod - Paris- 1973 - Tome 2.

41 - P. PARNIERE, G. SANZ -

Appréciation des caractéristiques d'emboutissabilité des  
tôles minces. Ecole d'été de métallurgie physique de  
Villars-sur-Ollon. Septembre 1975 - Editions du C.N.R.S..

42 - W.A. BACKOFEN, I.R. TURNER, D.H. AVERY -

Superplasticity in an Al-Zn alloy.  
Trans. of the A.S.M. - Vol 59 - 1964.

43 - D. VARCHON -

Contribution à l'étude des propriétés mécaniques de  
l'eutectoïde zinc-aluminium.  
Thèse de Docteur-Ingénieur - Besançon - 1974.



44 - S.P. KEELER -

Determination of forming limits in automotive stampings. Sheet Metal Industries - Sept. 1965.

45 - G.M. GOODWIN -

Application of strain analysis to sheet metal forming problems in the press shop.

IDDRG - Turin - 1968 - La Metallurgia Italiana n° 8.

46 - R.D. VENTER, M.C. DE MALHERBE -

Theoretical estimate of the Keeler-Goodwin formability curve. Sheet Metal Industries - Vol 48 - n° 9 - Sept. 1971.

47 - T. KIBUMA, K. NAKAZIMA -

Determination of forming limit curve.

Trans. of Iron and Steel Institute of Japon - n° 827 - 1971.

48 - M. GRUMBACH, G. SANZ -

Influence de quelques paramètres sur les courbes limites d'emboutissage. Revue de Métallurgie - Avril 1972.

49 - LIANG BING-WEN -

Determination of the blank radius of deep drawn components of revolution. Sheet Metal Industries - Sept. 1979.





